第 14 講　ゲームの理論 (2) 展開型ゲーム（テキスト p. 345–358）

先生「逐次手番ゲーム，Extensive form game を説明します．あと，繰返しゲームも」
太郎「将棋かな？面白そう」
花子「私，ルール知らない」

---

1. 手番のあるナッシュ均衡

		太郎 男 映画	サッカー
花子	映画	100,　50	20,　−10
	サッカー	0,　0	50,　100

前回紹介した男女の争いゲームに手番を導入する．最初に，花子が映画，サッカーのいずれかを選ぶ．次に太郎が，花子の選択に応じて，映画，サッカーのいずれかを選択する．利得が確定する．ゲームの構造は樹形図で表現できる．プレーヤーが選択する場所に点を記入する．利得は，上が先手番の花子，下が後手番の太郎である．【図 1】

後手番の太郎の立ち位置は，先手番の花子の選択に依存する．花子が映画を選択したときの太郎を P 太郎，花子がサッカーを選択したときの太郎を Q 太郎とする．太郎の戦略とは，単なる映画，サッカーの選択ではない．P 太郎の選択と Q 太郎の選択をペアにして，すべての可能性を書き尽くさなければならない．たとえば，P 太郎が映画，Q 太郎がサッカーを選択するという戦略を，(映, サ) と表記するとしよう．太郎の戦略は 4 通り．ゲームは次のような標準型ゲームとして表現できる．

【図 2】は，花子が映画，太郎が (サ, サ) を選択したことを表す（映画，(サ, サ)）を図示したものである．

		太郎 (映, 映)	(映, サ)	(サ, 映)	(サ, サ)
花子	映画	100,　50			20,　−10
	サッカー				50,　100

問題 1

利得表を完成し，ナッシュ均衡を求めよ．

解答

利得表は次の通り．

		太郎 (映, 映)	(映, サ)	(サ, 映)	(サ, サ)
花子	映画	100,　50	100,　50	20,　−10	20,　−10
	サッカー	0,　0	50,　100	0,　0	50,　100

花子目線 : 1 列では映画（100 に下線），2 列では映画（100 に下線），3 列では映画（20 に下線），4 列ではサッカー（50 に下線）．

太郎目線 : 1 行では (映, 映) または (映, サ)（ともに 50 に下線）．2 行では (映, サ) または (サ サ)（ともに 100 に下線）．

2 つの数字に下線が引かれているマスを調べると, (映画，(映, 映)) , (映画，(映, サ)) , (サッカー, (サ, サ)) の 3 つ．　· · · (答)

2. 信用されない脅し

（サッカー，(サ, サ)）はナッシュ均衡である．いったん均衡が達成されると，花子も太郎も戦略を変える誘因を持たないから．しかし，この均衡は現実的だろうか．太郎の (サ, サ) 戦略は，一種の脅しである．花子が脅しを信じれば，サッカーを選んでくれる．しかし，花子が映画を選び，太郎の立ち位置が点 P で確定したとすると，戦略 (サ, サ) はもはや脅しとして通用しない．信用されない脅し (incredible threat) という．均衡概念を改良した方が良い．

3. 部分ゲーム完全均衡（p. 351）

樹形図を下から部分に分けて最適戦略を導出する．P 太郎の選択は映画，Q 太郎の選択はサッカー．太郎の最適戦略は (映, サ) である．このとき，花子の最適戦略は映画である．均衡は,（映画，(映, サ)）の 1 つ．部分ゲーム完全均衡 (subgame perfect equilibrium) という．後手番のプレーヤーから順に問題を解いていく方法を，後ろ向き帰納法 (backward induction) という[1].【図 3】は，部分ゲーム完全均衡を図示したものである．

問題 2（ゼロ和ゲーム）

		花子 遊ぶ	花子 遊ばない
太郎	遊ぶ	40,　-40	-10,　10
	遊ばない	-30,　30	20,　-20

太郎を先手番，花子を後手番とする．樹形図を作成し，部分ゲーム完全均衡を求めよ．

解答

樹形図は【図 4】．部分ゲーム完全均衡は,（遊ぶ，(遊ばない, 遊ぶ)）の 1 つ．[2]

4. 繰返しゲーム（p. 355）

		太郎 協調 C	太郎 非協調 N
花子	協調 C	100,　100	0,　150
	非協調 N	150,　0	50,　50

花子と太郎が，協調 C，非協調 N を選択する同時手番ゲームを考える．ナッシュ均衡は (N, N)．望ましい均衡 (C, C) は達成されない．世の中そんなに非協調ばかりだろうか．そうは思わない．日本人は助け合って生きている．囚人のジレンマを解消するアイディアはないか．

上のゲームを何度も繰り返すゲームを考える．以下の戦略を仮定する[3]．

(1) 相手が協調すれば，こちらも協調する．
(2) 相手が非協調を選択したら，次回からはずっと非協調を選択する．

【図 5】最初の状態を (C, C) とする．この状態は，将来的に維持されるだろうか．結論は，個人が将来をどのくらい重視するかに依存する．割引因子を $0 < \delta < 1$ とする．

[1] 第 15 講のシュタッケルベルク均衡を参照せよ．
[2] 後手番が得をするゲームもある．second mover advantage という．
[3] しっぺ返し戦略，あるいは，トリガー戦略という．

(C, C) が繰返されるとき，利得の割引現在価値の合計は，

$$100 + 100\delta + 100\delta^2 + \cdots = \frac{100}{1-\delta}$$

である．

非協調を選択し，短期的に大きな利得を得たのち，(N, N) が繰返されるとき，利得の割引現在価値の合計は，

$$150 + 50\delta + 50\delta^2 + \cdots = 100 + \frac{50}{1-\delta} = \frac{150 - 100\delta}{1-\delta}$$

である．上の方が大きくなるのは，

$$100 > 150 - 100\delta \Rightarrow \frac{1}{2} < \delta < 1 \tag{1}$$

のとき．(1) 式が満たされるとき，太郎も花子も協調関係を壊す誘因を持たない．(C, C) は維持される[4]．δ が大きいとは，将来を重視するということである．目先の利益にとらわれず，将来を重視する姿勢を持ちましょう．

補足

1. 割引因子

現在の 1 万円と 1 年後の 1 万円は同じではない．年利 1% の投資機会があるとする．現在の 1 万円は，1 年後に 1.01 万円になる．ということは，1 年後の 1 万円は，現在だと $\frac{1}{1.01}$ 万円の価値のはず．一般に，年利が r のとき，1 年後の 1 万円は，現在の $\frac{1}{1+r}$ 万円と同じとみなすことができる．割引現在価値という．r を割引率，$\delta = \frac{1}{1+r}$ を割引因子という．

2. 等比数列とその和

初項 a，公比 r の等比数列の一般項は，$a_n = ar^{n-1}$ と表せる．初項から第 n 項までの和を S_n とおくと，

$$S_n = \begin{cases} \frac{a(1-r^n)}{1-r} & \text{if} \quad r \neq 1 \\ na & \phantom{\text{if}} \quad r = 1 \end{cases}$$

が成り立つ．

次に，n が十分大きいケースを考える．$0 < r < 1$ と仮定する．$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ である．したがって，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r} \tag{2}$$

が成り立つ[5][6]．利得の割引現在価値の総和は，(2) 式を用いて計算できる．

花子「週末，映画観にいかない？」
太郎「喜んで」

---

[4] フォーク定理 (Folk theorem) という．まあ，そうだよね，という意味．

[5] 等比数列の無限和を，無限等比級数という．

[6] （別解）私の中に私がいる，を利用する．無限和が存在すると仮定する．

$$\begin{aligned} S &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \\ &= a + r(a + ar + ar^2 + \cdots) \\ &= a + rS \end{aligned}$$

したがって，

$$S = \frac{a}{1-r}$$

図1. 樹形図

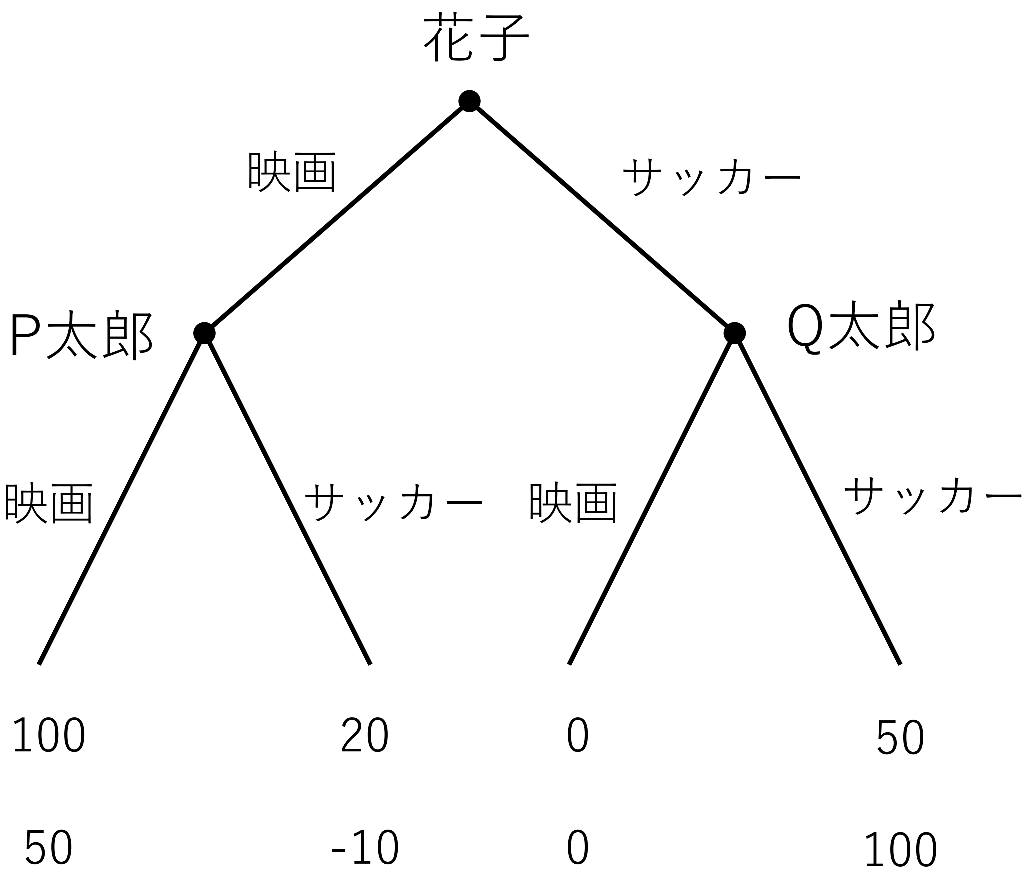

図2. （映画, （サ, サ））

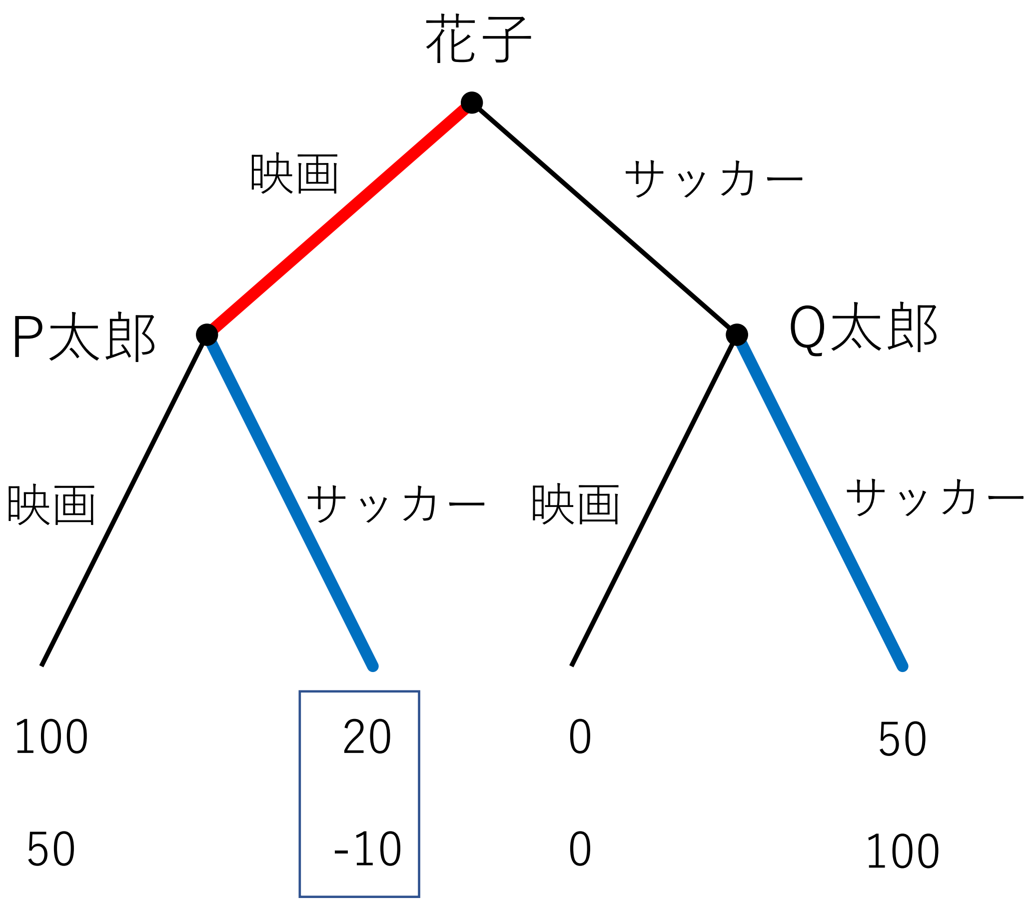

図3. 部分ゲーム完全均衡

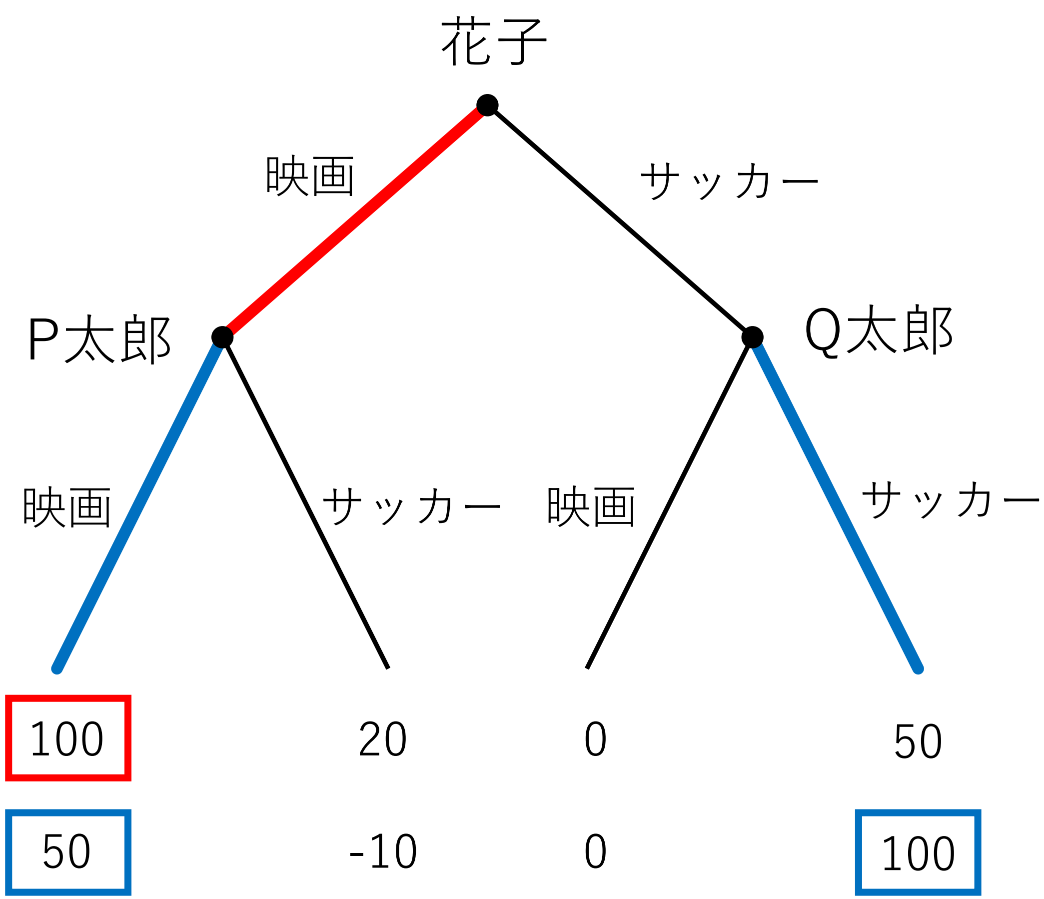

図4. 樹形図

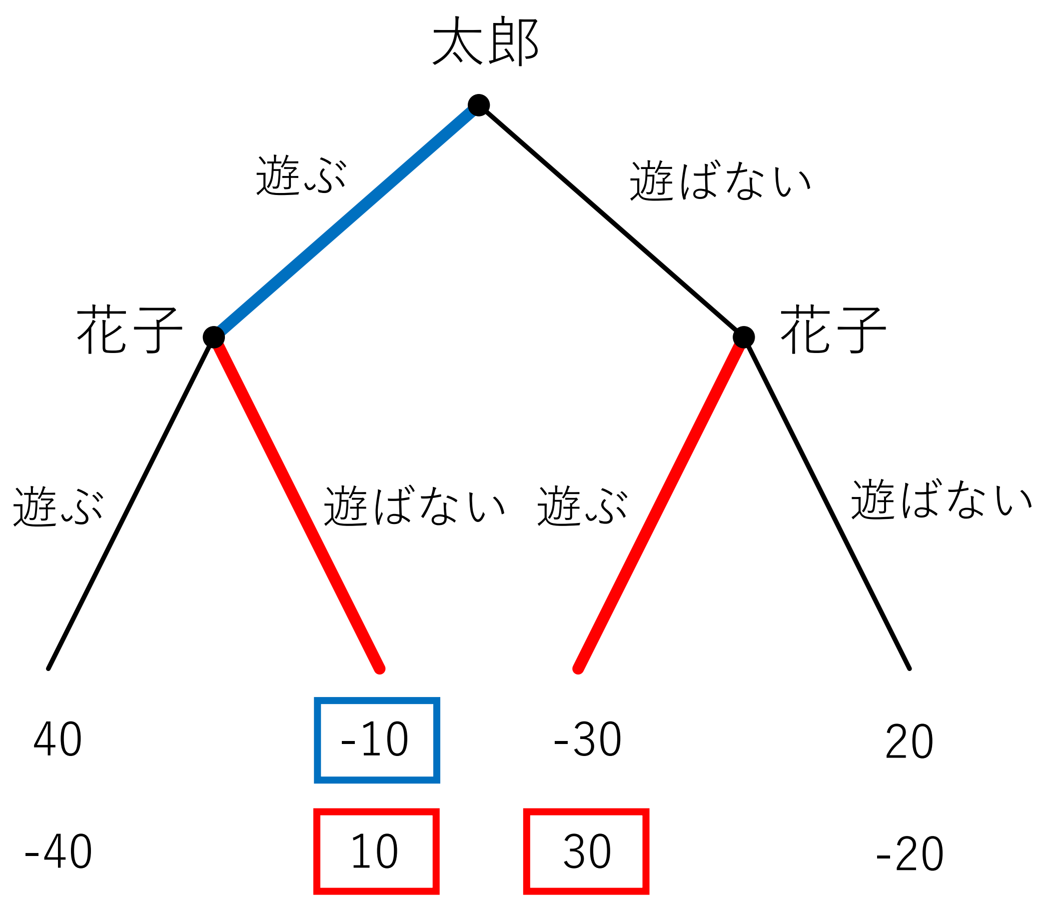

図5. 繰返しゲーム

$$
\begin{tikzcd}
(C,C) \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{array}{c}(C,C)\\ 100\end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c}(C,C)\\ 100\end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c}(C,C)\\ 100\end{array} \arrow[r] & {} \\
 & \begin{array}{c}(C,N)\\ 150\end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c}(N,N)\\ 50\end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c}(N,N)\\ 50\end{array} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}
$$