第 11 講　市場均衡 (1) 交換経済（テキスト 132–136 ページ）

先生「今日は，数式を用いて交換経済を学びます」
太郎「数式だって」
花子「先生，数学好きだよね」

問題 1　花子は，リンゴを 60 個，みかんを 30 個持っている．効用関数を，

$$u = U(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

とする (x_1 リンゴの消費量，x_2 みかんの消費量).

リンゴ 1 個 100 円，みかん 1 個 40 円で交換の機会が与えられたとき，花子はどのような取引をするか.

解答

いったんすべてを売却したのち買い戻す状況を想定する．予算制約式は，

$$7200 = 100x_1 + 40x_2$$

である．花子の効用最大化問題は，次のように定式化される．

$$\max_{x_1, x_2} \quad u = x_1 x_2 \quad \text{subject to} \quad 7200 = 100x_1 + 40x_2$$

最適化条件は，

$$MRS_{21} = \frac{100}{40}$$
$$7200 = 100x_1 + 40x_2$$

ここで，$MRS_{21} = u_1/u_2 = x_2/x_1$ より，$100x_1 = 40x_2$．これより，$(x_1^*, x_2^*) = (36, 90)$ が得られる．したがって，リンゴを $60 - 36 = 24$ 個売り，みかんを $90 - 30 = 60$ 個買うという取引をする．

問題 2

上の例題で，リンゴの価格を p_1，みかんの価格を p_2 としたときの需要関数 (x_1^*, x_2^*) を求めよ．

解答

花子の効用最大化問題は，次のように定式化される．

$$\max_{x_1, x_2} \quad u = x_1 x_2 \quad \text{subject to} \quad 60p_1 + 30p_2 = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

最適化条件は，

$$MRS_{21} = \frac{p_1}{p_2}$$
$$60p_1 + 30p_2 = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

ここで，$MRS_{21} = u_1/u_2 = x_2/x_1$ より，$p_1 x_1 = p_2 x_2$．したがって，$60p_1 + 30p_2 = 2p_1 x_1$ より，

$$x_1^* = 30 + 15\frac{p_2}{p_1} \tag{1}$$

同様にして，

$$x_2^* = 15 + 30\frac{p_1}{p_2} \tag{2}$$

2 財 (リンゴ，みかん)，2 個人 (A, B) からなる交換経済を考える．各個人の賦存量は次のようであるとする．

	リンゴ	みかん
個人 A の賦存量	60	30
個人 B の賦存量	0	60
総賦存量	60	90

1. 主体的均衡

個人 A の最適化問題

$$\max_{x_1^A, x_2^A} \quad u = u^A(x_1^A, x_2^A) \quad \text{subject to} \quad 60p_1 + 30p_2 = p_1 x_1^A + p_2 x_2^A$$

上付きの A, B は個人を表す．下付きの 1,2 は財を表す．たとえば，x_1^A は個人 A のリンゴの消費量を表す.

最適化の条件

$$MRS_{21}^A = \frac{p_1}{p_2} \tag{3}$$

$$60p_1 + 30p_2 = p_1 x_1^A + p_2 x_2^A \tag{4}$$

を解くと，主体的均衡 $A(x_1^{A*}, x_2^{A*})$ が得られる（**図 4.9**）.

需要 x_1^{A*}, x_2^{A*} は相対価格 $p = p_1/p_2$ の関数である.

個人 B の最適化問題

$$\max_{x_1^B,\, x_2^B} \quad u = u^B(x_1^B, x_2^B) \quad \text{subject to} \quad 60p_2 = p_1 x_1^B + p_2 x_2^B$$

最適化の条件

$$MRS_{21}^B = \frac{p_1}{p_2} \tag{5}$$

$$60p_2 = p_1 x_1^B + p_2 x_2^B \tag{6}$$

を解くと，主体的均衡 $B(x_1^{B*}, x_2^{B*})$ が得られる（**図 4.10**）.

需要 x_1^{B*}, x_2^{B*} は相対価格 $p = p_1/p_2$ の関数である.

2. 市場均衡

リンゴ市場，みかん市場の均衡条件は次式で与えられる.

$$x_1^{A*} + x_1^{B*} = 60 \tag{7}$$

$$x_2^{A*} + x_2^{B*} = 90 \tag{8}$$

3. ワルラス法則と相対価格

みかん市場の均衡条件 (8) 式は，各個人の予算制約 (4), (6) 式と，りんご市場の均衡条件 (7) 式から導出される[1]．需要関数を (7) 式 (あるいは (8) 式) に代入すると，均衡における相対価格 $p^* = (p_1/p_2)^*$ が求められる．各個人の需要 (x_1^{A*}, x_2^{A*}), (x_1^{B*}, x_2^{B*}) および取引量も求められる.

[1](4), (6) 式の辺々を加える.

$$60p_1 + 90p_2 = p_1(x_1^A + x_1^B) + p_2(x_2^A + x_2^B)$$

(7) 式および $p_2 > 0$ より (8) 式が得られる.

一般に，n 個の市場があって，ある価格体系のもとで $(n-1)$ 個の市場が均衡しているとき，残りの 1 つの市場も均衡する．ワルラス法則という.

問題 3

各個人の効用関数を $u^A = x_1^A x_2^A$，$u^B = x_1^B x_2^B$ とする．

(1) 個人 B の需要 x_1^{B*}, x_2^{B*} を，相対価格 $p = p_1/p_2$ を用いて表せ．

(2) 市場均衡における相対価格 p^* を求めよ．

(3) 均衡需要量 (x_1^{A*}, x_2^{A*}), (x_1^{B*}, x_2^{B*}) を求めよ．

(4) 個人 A, B の間でどのような取引がなされたのか説明せよ．

解答

(1) 個人 B の最適化問題は，次のように定式化される．

$$\max_{x_1^B,\, x_2^B} \quad u^B = x_1^B x_2^B \quad \text{subject to} \quad 60p_2 = p_1 x_1^B + p_2 x_2^B$$

最適化の条件は，

$$MRS_{21}^B = \frac{p_1}{p_2}$$
$$60p_2 = p_1 x_1^B + p_2 x_2^B$$

ここで，$MRS_{21}^B = u_1^B/u_2^B = x_2^B/x_1^B$ より，$p_1 x_1^B = p_2 x_2^B$．したがって，$60p_2 = 2p_2 x_2^B$ より，

$$x_2^{B^*} = 30 \tag{9}$$

同様にして，

$$x_1^{B^*} = 30\frac{p_2}{p_1} = \frac{30}{p} \tag{10}$$

(2) (2), (9) 式を，(8) 式に代入する．

$$(15 + 30p) + 30 = 90$$

これを解いて，

$$p^* = \frac{3}{2} \tag{11}$$

（別解）(1), (10) 式を，(7) 式に代入する．

$$\left(30 + \frac{15}{p}\right) + \frac{30}{p} = 60$$

これを解いて，$p^* = 3/2$.

(3) (11) 式を，(1), (2), (10) 式に代入すると，

$$(x_1^{A*}, x_2^{A*}) = (40, 60)$$
$$(x_1^{B*}, x_2^{B*}) = (20, 30)$$

(4) 初期賦存量と，最適消費量を比較する．個人 A は，リンゴ 20 個と交換に，みかん 30 個を手に入れた．個人 B は，みかん 30 個と交換に，リンゴ 20 個を手に入れた．

リンゴ 1 個は，みかん 1.5 個分の価値がある．この 1.5 というのが，リンゴの相対価格 $p^* = p_1/p_2$ である．

花子「上付き，下付きでくらくらするね」

太郎「ワルラス法則ってちょっとかっこいい」
