

## 第9講 消費者行動の理論 (4) 予算制約と効用最大化 (テキスト 32-38 ページ)

---

花子と太郎は、フルーツパーティーの買い出しのためスーパーにいる。  
 予算は3,000円。リンゴは1個200円、ミカンは1個100円で売られている。  
 花子「うーん。それぞれ10個ずつでどう」  
 太郎「リンゴ買い過ぎでしょ。リンゴ5個、みかん20個がベスト」

---

## 1. 予算制約式と予算線

与えられた所得、価格のもとで、リンゴとみかんを消費する。リンゴの消費量を  $x_1$ 、みかんの消費量を  $x_2$  とする。消費可能な財の組合せ  $(x_1, x_2)$  はいくつもある。所得を  $m$  (円)、リンゴの価格を  $p_1$  (円)、みかんの価格を  $p_2$  (円) とする。消費可能な組合せは、数式を用いると、

$$m \geq p_1x_1 + p_2x_2 \quad (1)$$

と表現できる。(1)式を満たす第1象限および両軸上の領域を消費可能集合 (consumption possibility set) という。特に、所得を残らず消費するとき、消費可能な組合せは、

$$m = p_1x_1 + p_2x_2 \quad (2)$$

と表現できる。(2)式を予算制約式という<sup>1</sup>。(2)式を平面  $(x_1, x_2)$  上に描いたものを予算線という (図 2.7)。

## 予算線の性質

- (i) 右下がり。傾き  $-p_1/p_2$ 。
- (ii) ヨコ軸との切片  $m/p_1$ 、タテ軸との切片  $m/p_2$ 。

## 比較静学

## (i) 所得効果

所得  $m$  が増加したとする。予算線は右上に平行移動する。

## (ii) 価格効果

価格  $p_1$  が上昇したとする。予算線は、タテ軸との切片を中心に内側に回転する。

価格  $p_2$  が上昇したとする。予算線は、ヨコ軸との切片を中心に内側に回転する。

## 問題 1

$(m, p_1, p_2) = (3000, 200, 100)$  のとき、予算制約式は次式で与えられる。

$$3000 = 200x_1 + 100x_2$$

- (1) 平面  $(x_1, x_2)$  上に予算線を図示せよ。
- (2) 価格が一定のもとで、所得が  $m = 4000$  になったときの予算線を図示せよ。
- (3) 所得が一定のもとで、リンゴの価格が  $p_1 = 300$  になったときの予算線を図示せよ。

---

<sup>1</sup>消費可能な領域の境界なので、消費可能性フロンティア (consumption possibility frontier) ともいう。

## 2. 効用最大化

「消費者は、価格を所与として、予算制約のもとで効用が最大となるように財の消費量を決定する」という消費者の最適化問題は、次のように定式化される<sup>2</sup>。

$$\max_{x_1, x_2} u = U(x_1, x_2) \quad \text{subject to} \quad m = p_1x_1 + p_2x_2 \quad (3)$$

(3) の問題の解  $(x_1^*, x_2^*)$  を主體的均衡という。上付きの \* は、解であることを表す。均衡は、図 2.8 の点  $P$  で表される。

最適化の条件は、

$$MRS_{21} = \frac{p_1}{p_2} \quad (4)$$

$$m = p_1x_1 + p_2x_2 \quad (5)$$

である<sup>3</sup>。

(5) 式は、均衡が予算線上にあることを意味する。(4) 式は、均衡において、無差別曲線と予算線が接していることを意味する。

(4), (5) 式を  $x_1, x_2$  の連立方程式とみなして解けば、均衡解  $(x_1^*, x_2^*)$  が求められる。

## 3. 需要関数と間接効用関数

主體的均衡における消費量  $x_1^*, x_2^*$  は、価格  $p_1, p_2$  と所得  $m$  の関数となる。需要関数 (demand function) という。

$$x_1^* = D_1(p_1, p_2, m) \quad (6)$$

$$x_2^* = D_2(p_1, p_2, m) \quad (7)$$

需要関数を効用関数に代入すると、主體的均衡における効用水準も価格  $p_1, p_2$  と所得  $m$  の関数となる。間接効用関数 (indirect utility function) という (54 ページ)。

$$u^* = U(x_1^*, x_2^*) = V(p_1, p_2, m) \quad (8)$$

### 図 2.8 の読み解き方

リンゴとみかんは無数にある。しかし、私のお財布の中身は限られている。そこをどう表現するか。予算線である。私の悩みは、予算線  $AB$  上のどの点を選ぶのかというただ 1 点である。

どの点を選んだらいい? 後は思考実験である。点  $Q$  はどうだろう。リンゴがちょっと少ない気がする。よく見ると、点  $Q$  を通る無差別曲線は、予算線ともう 1 点で交わっている。この点を  $S$  としよう。無差別なので、 $Q \sim S$  である。点  $S$  では、みかんが少ない気がする。私は、 $Q$  を選ぶこともできるし、 $S$  を選ぶこともできる。でもこれってベストな選択なのだろうか。そもそも、無差別な点が存在すること自体、ベストとは言えないんじゃないの。

点  $Q$  から予算線上を少し右下に移動しよう。この点を  $T$  とする。点  $T$  を通る無差別曲線を引いてみる。点  $Q$  を通る無差別曲線よりも右上にある。ということは、 $T \succ Q$  である。点  $Q$  よりも点  $T$  の方が効用が高い。良かった、 $Q$  を選ばなくて、私が求めていたのは  $T$  なのか? いや、待て。点  $T$  を通る無差別曲線も、予算線と別の点で交わっている。最初の状況と同じである。ということは、まだ改善の余地がありそうだ。

点  $T$  からさらに予算線上を右下に移動する。移動した点で無差別曲線を引いてみる。まだだ。もっとリンゴをくれ。

点  $P$  に到達した。無差別曲線が予算線と接している。これ以上右下に移動すると、効用が下がる。そうなのだ。点  $P$ こそ、私が探していた点なのだ。この点を選んで後悔する理由などだろうか。否。

<sup>2</sup>subject to は、「～の制約のもとで」の意味。

<sup>3</sup>1 階の条件 (first-order condition) という。1 階の条件は、解であるための必要条件。十分かどうかを調べるには 2 階の条件 (second-order condition) を利用する。単調性と希少性から、点  $P$  において 2 階の条件が成立することを数学的に証明できる。

### 例題 1

効用関数が、 $u = x_1^2 x_2$  であるとき、需要関数および間接効用関数を求めよ。予算制約式は (2) 式を用いよ。

### 解答

消費者の最適化問題は次のように定式化される。

$$\max_{x_1, x_2} u = x_1^2 x_2 \quad \text{subject to} \quad m = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

最適化の条件は、

$$MRS_{21} = \frac{p_1}{p_2} \tag{9}$$

$$m = p_1 x_1 + p_2 x_2 \tag{10}$$

である。

ここで、

$$MRS_{21} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{2x_1 x_2}{x_1^2} = \frac{2x_2}{x_1}$$

であるから、(9) 式より、

$$p_1 x_1 = 2p_2 x_2 \tag{11}$$

(11) 式を (10) 式に代入して、 $x_1$  を消去すると、

$$m = 2p_2 x_2 + p_2 x_2 = 3p_2 x_2$$

したがって、 $x_2^* = m/(3p_2)$ 。

(11) 式を (10) 式に代入して、 $x_2$  を消去すると、

$$m = p_1 x_1 + \frac{1}{2} p_1 x_1 = \frac{3}{2} p_1 x_1$$

したがって、 $x_1^* = 2m/(3p_1)$ 。

以上から、需要関数は、

$$(x_1^*, x_2^*) = \left( \frac{2m}{3p_1}, \frac{m}{3p_2} \right) \tag{12}$$

である。

(12) 式を効用関数に代入する。間接効用関数は、

$$u^* = (x_1^*)^2 x_2^* = \left( \frac{2m}{3p_1} \right)^2 \frac{m}{3p_2} = \frac{4m^3}{27(p_1)^2 p_2}$$

(補足)

$(m, p_1, p_2) = (3000, 200, 100)$  とすると、(12) 式より、 $(x_1^*, x_2^*) = (10, 10)$ 。

### 問題 2

効用関数が、 $u = x_1 x_2^2$  であるとき、需要関数および間接効用関数を求めよ。予算制約式は (2) 式を用いよ。

$$x_1^* = m/(3p_1), x_2^* = 2m/(3p_2), u^* = 4m^3/(27p_1 p_2^2)$$

---

2 人の会話を聞いていた経済学者がつぶやいた。

「ふむ。彼女の効用関数は、 $u = x_1^2 x_2$ 、彼の効用関数は、 $u = x_1 x_2^2$  ってところか」

---