「初級ミクロ経済学 I–4」（宮澤和俊）　2024/5/31

数学補論（テキスト 16–19 ページ）

1. 偏微分
2. 合成関数の微分法（1 変数）
3. 合成関数の微分法（2 変数）
4. 陰関数の定理
5. 自然対数の底 e
6. 対数関数の微分法
7. 逆関数の微分法
8. 指数関数の微分法

---

1. 偏微分

変数が 2 つ以上の関数の微分を，**偏微分**という．変数の数だけ偏微分がある．
∂（ラウンド）という記号を用いる．右下の添え字で表現することもある．

定義

関数 $u = U(x_1, x_2)$ に対して，

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \equiv \lim_{h\to 0} \frac{U(x_1+h, x_2) - U(x_1, x_2)}{h}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_2} \equiv \lim_{h\to 0} \frac{U(x_1, x_2+h) - U(x_1, x_2)}{h}$$

問題 *1*　関数 $u = U(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ の偏微分 $\partial u/\partial x_1$, $\partial u/\partial x_2$ を，定義を用いて求めよ．

解答

$$\begin{aligned}\frac{U(x_1+h, x_2) - U(x_1, x_2)}{h} &= \frac{(x_1+h)^2 x_2 - x_1^2 x_2}{h} \\ &= (2x_1 + h)x_2\end{aligned}$$

であるから，定義より，

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \lim_{h\to 0}(2x_1+h)x_2 = 2x_1x_2$$

$$\begin{aligned}\frac{U(x_1, x_2+h) - U(x_1, x_2)}{h} &= \frac{x_1^2(x_2+h) - x_1^2 x_2}{h} \\ &= x_1^2\end{aligned}$$

であるから，定義より，

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \lim_{h\to 0} x_1^2 = x_1^2$$

偏微分の意味

$\partial u/\partial x_1$　x_2 を定数とみなして x_1 で微分する．
$\partial u/\partial x_2$　x_1 を定数とみなして x_2 で微分する．

問題 *2*　定義を使わず，直観的に偏微分 $\partial u/\partial x_1$, $\partial u/\partial x_2$ を求めよ．

(1) $u = U(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1 + 4x_2 + 5$

(2) $u = U(x_1, x_2) = 2x_1x_2^3 + x_1^2x_2^2$

2. 合成関数の微分法（1 変数）

$$\begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases} \text{のとき} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{2}$$

（証明）

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \left[\lim_{k \to 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} \right] \left[\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
&= f'(g(x))g'(x)
\end{aligned}$$

（注）$g(x+h) - g(x) = k$ とおく．$h \to 0$ のとき，$k \to 0$ である．

問題 *3*　$y = (x^2 + x + 1)^3$ を微分せよ．

解答　$y = u^3$，　$u = x^2 + x + 1$ とおけば，

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
&= 3u^2 \cdot (2x + 1) \\
&= 3(x^2 + x + 1)^2 (2x + 1)
\end{aligned}$$

3. 合成関数の微分法（2 変数）

t の関数 $u = U(x_1(t), x_2(t))$ に対して，

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \tag{3}$$

が成り立つ．

（証明）定義より，

$$\frac{du}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{U(x_1(t+h), x_2(t+h)) - U(x_1(t), x_2(t))}{h}$$

$\Delta x_1 = x_1(t+h) - x_1(t)$, $\Delta x_2 = x_2(t+h) - x_2(t)$ とおく．

$$\begin{aligned}
&\frac{U(x_1(t+h), x_2(t+h)) - U(x_1(t), x_2(t))}{h} \\
&= \frac{U(x_1(t) + \Delta x_1, x_2(t) + \Delta x_2) - U(x_1(t), x_2(t))}{h} \\
&= \frac{U(x_1(t) + \Delta x_1, x_2(t) + \Delta x_2) - U(x_1(t), x_2(t) + \Delta x_2)}{h} \\
&+ \frac{U(x_1(t), x_2(t) + \Delta x_2) - U(x_1(t), x_2(t))}{h} \\
&= \frac{U(x_1(t) + \Delta x_1, x_2(t) + \Delta x_2) - U(x_1(t), x_2(t) + \Delta x_2)}{\Delta x_1} \frac{\Delta x_1}{h} \\
&+ \frac{U(x_1(t), x_2(t) + \Delta x_2) - U(x_1(t), x_2(t))}{\Delta x_2} \frac{\Delta x_2}{h}
\end{aligned}$$

$h \to 0$ のとき，$\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$ であって，$\Delta x_1/h \to dx_1/dt$, $\Delta x_2/h \to dx_2/dt$ であるから，

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt}$$

が成り立つ．

4. 陰関数の定理

無差別曲線 $\bar{u} = U(x_1, x_2)$ は，x_1 と x_2 の対応関係を「暗黙のうちに」（implicit に）表している．つまり，x_2 を x_1 の関数とみなすことができる[1]．

陰関数の定理

関係式 $\bar{u} = U(x_1, x_2)$ で表される関数 x_2 を x_1 で微分すると，

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{U_1(x_1, x_2)}{U_2(x_1, x_2)} \tag{4}$$

が成り立つ．

（証明）$x_2 = f(x_1)$ とおく:

$$\bar{u} = U(x_1, f(x_1))$$

両辺を x_1 で微分する．$\bar{u}$ は定数なので，左辺はゼロになる．右辺は，合成関数の微分法を用いると，

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}$$

したがって，

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = -\frac{U_1(x_1, x_2)}{U_2(x_1, x_2)}$$

が成り立つ．

問題 *4*　効用関数を，$U(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ とする．限界代替率 MRS_{21} を x_1, x_2 を用いて表せ．

解答

陰関数の定理より，

$$MRS_{21} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{U_1(x_1, x_2)}{U_2(x_1, x_2)}$$

ここで，

$$U_1 = 2x_1x_2$$
$$U_2 = x_1^2$$

であるから，

$$MRS_{21} = \frac{2x_1x_2}{x_1^2} = \frac{2x_2}{x_1}$$

問題 *5*　上の例で限界代替率 MRS_{12} を求め，

$$MRS_{12} = \frac{1}{MRS_{21}}$$

が成り立つことを確かめよ．

問題 *6*　次の効用関数の限界代替率 MRS_{21} を求めよ．

(1) $u = x_1 x_2^2$
(2) $u = x_1^3 x_2^2$
(3) $u = 2x_1 + 3x_2$

(1) $x_2/(2x_1)$, (2) $3x_2/(2x_1)$, (3) $2/3$

[1]たとえば，無差別曲線の式 $8 = x_1x_2$ から，$x_2 = \frac{8}{x_1}$ という関数を求めることができる．

5. 自然対数の底 e

自然数 n が十分大きいとき，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

は，ある値に収束することが知られている（下の表を参照）．この極限値を，ネイピア数，あるいは，自然対数の底といい，e を用いて表す．

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.71828... \tag{5}$$

$x=1/n$ とおく．$n\to\infty \Leftrightarrow x\to 0$ なので，

$$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \tag{6}$$

でもある．

6. 対数関数の微分法

e を底とする対数 $\log_e x$ を自然対数という．e を省略して，$\log x$ とかく．$\ln x$ ともかく．

［公式］

$$(\log x)'=\frac{1}{x} \tag{7}$$

［証明］定義を用いて，$f(x)=\log x$ の導関数を求め，(6) 式を利用する．

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\left(\frac{x+h}{x}\right)\\
&=\lim_{h\to 0}\log\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\\
&=\lim_{h\to 0}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\frac{1}{x}}\\
&=\lim_{k\to 0}\frac{1}{x}\log(1+k)^{\frac{1}{k}}\\
&=\frac{1}{x}\log e\\
&=\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

ただし，$k=h/x$ であり，$h\to 0\Leftrightarrow k\to 0$.

（補足）対数の公式（真数条件 $A>0$ など，底の条件 $a>0, a\neq 1$ などを満たすとき）

(1) $\log 1=0$

(2) $\log e=1$

(3) $\log A+\log B=\log AB$

(4) $\log A-\log B=\log\frac{A}{B}$

(5) $\log A^n=n\log A$

(6) $\log_a A=\frac{\log_b A}{\log_b a}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2.00	2.250	2.370	2.441	2.488	2.522	2.546	2.566	2.581	2.594

7. 逆関数の微分法

［公式］ $y = f(x)$ の逆関数 $x = g(y)$ に対して，

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \tag{8}$$

が成り立つ．

［証明］定義より，

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{h \to 0} \frac{g(y+h) - g(y)}{h}$$

$g(y+h) - g(y) = k$ とおく．
$g(y) = x$ を用いると，$g(y+h) = x + k \Leftrightarrow y + h = f(x+k)$.
さらに，$y = f(x)$ を用いると，$h = f(x+k) - f(k)$.
最後に，$h \to 0 \Leftrightarrow k \to 0$ であるので，

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{k \to 0} \frac{k}{f(x+k) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

8. 指数関数の微分法

［公式］

$$(e^x)' = e^x \tag{9}$$

［証明］$y = e^x$ とおく．対数の定義より，

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \log y$$

両辺を y で微分する．対数関数の微分公式 (7) より，

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$$

最後に，逆関数の微分法 (8) 式を用いると，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = y = e^x$$

問題 *7*　次の関数を微分せよ．
(1) $y = \log(2x+3)$
(2) $y = \log(x^2 + x + 2)$
(3) $y = e^{x^2+x}$
(4) $y = e^x - e^{-x}$

(1) $2/(2x+3)$
(2) $(2x+1)/(x^2+x+2)$
(3) $(2x+1)e^{x^2+x}$
(4) $e^x + e^{-x}$