A Limit Theorem for Superprocesses
超過程に関するある極限定理

Isamu DÔKU
Department of Mathematics, Saitama University

Let $\mathbb{Z}^d$ be a d-dimensional lattice, and each site on $\mathbb{Z}^d$ is occupied by either one of the two species. At each random time, a particle dies and is replaced by a new one, but the random time and the type chosen of the species are assumed to be determined by the environment conditions around the particle. The random function $\eta_t : \mathbb{Z}^d \to \{0,1\}$ denotes the state at time t, and each number of $\{0,1\}$ denotes the label of the type chosen of the two species. When we set $\|y\|_\infty := \max_i y_i$, we define $\mathcal{N}_x := x + \{y : \ 0 < \|y\|_\infty \leqslant r\}$. For $i = 0,1$, let $f_i(x,\eta)$ be a frequency of type i in the neighborhood $\mathcal{N}_x$ of x for η. For non-negative parameters $\alpha_{ij} \geq 0$, the dynamics of η_t is defined as follows. The state η makes transition

$$0 \to 1 \quad \text{at rate} \quad \frac{\lambda f_1(f_0 + \alpha_{01} f_1)}{\lambda f_1 + f_0}, \tag{1}$$

and it makes transition

$$1 \to 0 \quad \text{at rate} \quad f\frac{0(f_1 + \alpha_{10} f_0)}{\lambda f_1 + f_0}. \tag{2}$$

The exchange of particles after death is described in the form being proportional to the weighted density between the two species, expressed by a parameter λ. For brevity's sake we shall treat a simple case $\lambda = 1$ only in what follows. For $N = 1, 2, \ldots$, let $m_N \in \mathbb{N}$, and we put $\ell_N := m_N \sqrt{N}$, and $\mathbb{S}_N := \mathbb{Z}^d/\ell_N$. While, $W_N = (W_N^1, \ldots, W_N^d) \in (\mathbb{Z}^d/m_N) \setminus \{0\}$ is defined as a random vector satisfying

$$\text{(i) } \mathcal{L}(W_N) = \mathcal{L}(-W_N); \qquad \text{(ii) } E(W_N^i W_N^j) \to \delta_{ij}\sigma^2 (\geq 0) \quad (\text{as } N \to \infty);$$
$$\text{(iii) } \{|W_N|^2\}(N \in \mathbb{N}) \quad \text{is uniformly integrable.}$$

Here $\mathcal{L}(Y)$ indicates the law of a random variable Y. For the kernel $p_N(x) := P(W_N/\sqrt{N} = x)$, $x \in \mathbb{S}_N$ and $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{S}_N}$, we define the scaled frequency f_i^N as

$$f_i^N(x,\eta) = \sum_{y \in \mathbb{S}_N} p_N(y-x) 1_{\{\eta(y)=i\}}, \qquad (i = 0,1). \tag{3}$$

We denote by η_t^N the state determined by the scaled frequency depending on α_i^N and p_N. On this account, we may define the associated measure-valued process as

$$X_t^N := \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{S}_N} \eta_t^N(x) \delta_x. \tag{4}$$

For the initial value X_0^N, we assume that $\sup_N\langle X_0^N, 1\rangle < \infty$ and $X_0^N \to X_0$ in $M_F(\mathbb{R}^d)$ as $N\to\infty$, where $M_F(\mathbb{R}^d)$ is the totality of all the finite measures on $\mathbb{R}^d$, equipped with the topology of weak convergence. Let $\{\xi_t^x\}$ be a continuous time random walk with rate N and step distribution p_N starting at a point $x \in \mathbb{S}_N$, and $\{\hat{\xi}_t^x\}$ be a continuous time coalescing random walk with rate N and step distribution p_N starting at a point x. For a finite set $A\subset \mathbb{S}_N$, we denote by $\tau(A)$ the time when all the particles starting from A finally coalesce into a single particle, that is to say, we define $\tau(A) := \inf\{t>0 : \#\{\hat{\xi}_t^x;\ x\in A\} = 1\}$. Take a sequence $\{\varepsilon_N\}$ of positive numbers such that $\varepsilon_N \to 0$ and $N\varepsilon_N\to\infty$ as $N\to\infty$. Moreover, we suppose that when $N\to\infty$,

$$N\cdot P(\xi^0_{\varepsilon_N}=0)\to 0 \quad \text{and} \quad \sum_{e\in\mathbb{S}_N} p_N(e,x)\cdot P(\tau(\{0,e\})\in(\varepsilon_N,t])\to 0 \quad (\forall t>0). \tag{5}$$

We also assume now that the following limits exist :

$$\exists\zeta(A) = \lim_{N\to\infty} P\left(\tau(A/\ell_N)\leqslant \varepsilon_N\right) \tag{6}$$

holds for any finite subset $A\subset\mathbb{Z}^d$.

Theorem. Assume that there exists a sequence $\{\varepsilon_N^*\}$ of positive numbers such that $\varepsilon_N^*\to 0$ and $N\cdot\varepsilon_N^*\to\infty$ (as $N\to\infty$), and

$$\gamma_N(x) = \sum_{e\in\mathbb{S}_N} p_N(e,x)\cdot P(\hat{\tau}^N(\{0,e\})>\varepsilon_N^*), \qquad \gamma_N(x)\to\gamma(x) \quad (N\to\infty).$$

Here $\hat{\tau}^N(A)$ denotes the time at which all particles starting from a set $A\subset\mathbb{S}_N$ have coalesced into a single particle. When P_N denotes the law of a stochastic process $X_\cdot^N$ on the path space Ω_D, then the convergence

$$P_N \quad\Longrightarrow\quad \hat{P}_{X_0} \qquad (N\to\infty) \tag{7}$$

holds, where $\hat{X} = \{\hat{X}_t\} \equiv \{\hat{X}_t^{\gamma(x)}\}$, $t\geq 0$ is an $\mathcal{F}_t$-adapted $M_F(\mathbb{R}^d)$-valued continuous stochastic process defined on the filtered complete probability space $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P)$, and $\hat{X} = \{\hat{X}_t,\hat{P}_\eta\}$ solves the $(\mathcal{L}_1,\mathrm{Dom}(\mathcal{L}_1))$-martingale problem. Namely, $\hat{X}_0=\eta\in M_F(\mathbb{R}^d)$ holds $\hat{P}_\eta$ a.s. and

$$F(\hat{X}_t) - F(\hat{X}_0) - \int_0^t \mathcal{L}_1 F(\hat{X}_s)ds \qquad (\forall F = F(\mu)\in\mathrm{Dom}(\mathcal{L}_1)) \tag{8}$$

is a $\hat{P}_\eta$-martingale with respect to $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$. Here $\theta = \theta^1(\beta,\sigma(\cdot)) - \theta^2(\beta,\delta,\sigma(\cdot))$ and

$$\theta^1(\beta,\sigma(\cdot)) := \sum_{A\in S_F}\beta(A)\sigma(A), \qquad \theta^2(\beta,\delta,\sigma(\cdot)) := \sum_{A\in S_F}(\beta(A)+\delta(A))\sigma(A\cup\{0\}).$$

Moreover, $\hat{P}_{X_0}$ is the law of a superprocess $\hat{X}_t^{\gamma(x)}$ with initial measure $\hat{X}_0$. Here $\mathcal{L}_1F(\mu) = \int A\Phi_1 F d\mu + \int\gamma(x)\Phi_2 F d\mu$ for $\forall F = F(\mu\in\mathrm{Dom}(\mathcal{L}_1)$, $\mu\in M_F(\mathbb{R}^d)$, where $A = (\sigma^2/2)\Delta + \theta$, Φ_1 (resp. Φ_2) denotes the first (second) variational derivative w.r.t. μ respectively.

複素葉層構造に付随した拡散過程と葉向正則写像

厚地 淳 (慶応義塾大学経済学部)

$\overline{M}$ を可分距離付け可能空間、S を $\overline{M}$ の閉集合とする。 $M := \overline{M} \setminus S$ が同次元、連結複素多様体 (葉と呼ぶ) の非交和になっている葉層構造を持つとき、$(\overline{M}, \mathcal{L}, S)$ を 特異点を持つ複素葉層構造という。$\mathcal{L}$ は葉の全体を表し, S が特異点集合である。葉層構造に付随した局所座標系の下では、$\dim_{\mathbf{C}} L = l$ とすると M は局所的に $\mathbf{C}^l$ の領域 (葉方向) と横断的方向に対応する位相空間の直積とみることができる。$S = \emptyset$ の時、非特異であるという。この時、単に $(M, \mathcal{L})$ と書くことにする。以下では、$\overline{M}$ はコンパクトであると仮定する。複素葉層構造は、元来、複素領域の微分方程式、力学系の定性的性質の研究から出てきたものであるが、現代の複素解析、複素幾何ではいろいろなところに登場する重要な対象である。このような葉層構造を持つ空間の幾何学的・関数論的性質を拡散過程の目から眺めたい。

1. 葉の上の正則拡散過程.

$L \in \mathcal{L}$ には Hermite 計量 $g = (g_{\alpha\overline{\beta}})$ が与えられており、対応する基本形式を $\omega = \frac{i}{2} g_{\alpha\overline{\beta}} dz_\alpha \wedge d\overline{z}_\beta$ とする。

g に 対応する複素ラプラシアン (complex Laplacian) を

$$\Box_L := 2 \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\overline{\beta}} \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \overline{\partial} z_\beta} \qquad ((g^{\alpha\overline{\beta}}) = g^{-1})$$

で定義する。これを生成作用素にもつ拡散過程を L 上の正則拡散過程と呼ぶことにする。「正則」は holomorphic を意味し、この名は L 上の (局所) 正則関数との合成が複素ブラウン運動の時間変更になることに由来する。また、複素ラプラシアンは L 上の標準接続によるヘッセ行列の g に関するトレースであり、Levi-Civita 接続に対応するリーマン計量に関するラプラシアンとは捩れの分だけ異なる。

2. M 上の葉向正則拡散過程.

g が各葉に沿って滑らかであれば、 各 L 上に正則拡散過程は存在する。これが M 上の拡散過程とみて良いものであるかどうか、例えば、出発点に関しての依存性 - 連続性、可測性 - といったものが成り立つかどうかは自明ではない。g が良い性質を満たし、次項で述べる調和測度が存在すれば、 M 上の拡散過程で各葉上の正則拡散過程と両立するものを構成することができる。なお、本報告では「葉向」=「leafwise」の意味で用いる。最近わが国で使用されるようになった語である。

3. $(M, \mathcal{L}, S)$ に沿った調和カレントと調和測度.

簡単のため、

1) $\overline{M}$ は コンパクト複素多様体 N に含まれており、各 $L \in \mathcal{L}$ は N の複素部分多様体である、とする。

今、U を M の局所座標系 の定義域とし、$U \cong \mathbb{B} \times \mathbb{T}$ ($\mathbb{B}$ は $\mathbf{C}^l$ の領域) とする。$(M, \mathcal{L}, S)$ に沿った (多重) 調和カレント T とは、

$$T = h(a,b)[\mathbb{B} \times \{b\}]d\mu(b).$$

と書けることである。ここで、$[\mathbb{B} \times \{b\}]$ は $\mathbb{B} \times \{b\}$ 上の積分のカレント、$d\mu$ は $\mathbb{T}$ 上の正のラドン測度、$h(a,b)$ は μ-a.e. b に関して変数 a について正の多重調和関数。T は正カレントであり、カレントの意味で $\partial\overline{\partial}T = 0$ が成り立つ。$m := T \wedge \omega^l$ とおくと、g がケーラーならば、L.Garnett の意味で m は調和測度である (ただし、有限測度とは限らない)。

注) $S = \emptyset$ ならば 常に T は存在する。$l = 1$ かつ S が locally pluripolar であれば、調和カレントは存在する。さらに　S が線形化可能であれば、$m(M) < \infty$ となる。

4. ディリクレ形式による構成.

次のような仮定を置く。

2) g は、各葉に沿っては 滑らかな完備ケーラー計量であり、各微分を含めて M 上でボレル可測である。

3) g は次の意味で局所有界である。N 上の連続なエルミート計量の基本形式 ω_0 が存在して、任意の M 上のコンパクト集合 K に対して、$C_K > 0$ があり、 K 上では

$$C_K^{-1}\omega_0 \leq \omega \leq C_K\omega_0.$$

4) 各葉上の g から決まるリッチ曲率は一様に下に有界: $-(2l-1)b^2 \leq Ric_L$.

各葉に沿って C^2 級であり、各階の微分を含めて M 上で連続かつコンパクト台を持つような関数全体を $C^2_{\mathcal{L},o}(M)$ と書くことにする。

$$\mathcal{E}(u,v) := -i\int_M v\partial\overline{\partial}u \wedge \omega^{l-1} \wedge T \qquad (u, v \in C^2_{\mathcal{L},o}(M))$$

とおく。$\mathcal{E}$ の対称部分を $\tilde{\mathcal{E}}$ とすると、$(\tilde{\mathcal{E}}, C^2_{\mathcal{L},o}(M))$ は $L^2(m)$ 上 可閉になることがわかる。$\mathcal{H}^1(T)$ を $C^2_{\mathcal{L},o}(M)$ の $\tilde{\mathcal{E}}$ による閉包とする。

定理 1. $(\mathcal{E}, \mathcal{H}^1(T))$ は $L^2(m)$ 上の強局所正則 (regular) ディリクレ空間となる。対応する拡散過程は保存的である。

5. 葉向正則写像.

この拡散過程を用いて、葉向正則写像を観察する。ボレル可測写像 $f : M \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ が葉向正則とは、各葉上では正則 (holomorphic) であることを言う。例えば次がわかる。

定理 2. 各葉の断面曲率は非正であり、$m := T \wedge \omega^l$ はエルゴード的な確率測度であるとする。$f : M \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ を非定数葉向正則写像とすると、f の除外点の個数は $2 + (2l-1)b^2/e(f)$ 以下である. ただし、$e(f) = \int_M T \wedge \omega^{l-1} \wedge f^*\omega_{FS}$ $(\leq \infty)$, ω_{FS} は $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ のフビニ-スタディ計量。

なお、$l = 1$ の時はより詳しいことがわかり、例も豊富にある。また、このとき、葉向正則写像 $f : M \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ $(n \geq 2)$ についても類似の結果が得られる。

放物型多様体上の連結和上の熱核評価

石渡　聡 (山形大学理学部)

はじめに

本研究は Bielefeld 大学の Alexander Grigor'yan 氏, Cornell 大学の Laurent Saloff-Coste 氏との共同研究 [2] に基づく.

非コンパクトリーマン多様体上の幾何解析の研究において, 熱核の長時間挙動を明らかにすることは大変重要な意味をもつ. 実際, Ricci 曲率が非負な多様体において, Li-Yau [6] により明らかにされた熱核 $p(t,x,y)$ の Li-Yau 型評価 (LY):

$$p(t,x,y) \asymp \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} e^{-b\frac{d^2(x,y)}{t}}$$

はその後 Grigor'yan [1], Saloff-Coste [7] により Poincaré 不等式 (PI) + 体積 2 倍条件 (VD), および Parabolic Harnack 不等式 (PHI) と同値であることが示され, ベキ零 Lie 群等これらの条件を満たす多様体上の幾何解析の発展に大きく貢献した.

本講演では Li-Yau 型評価が成り立たない多様体の典型的な例である連結和で, 特に end が放物型, 即ち対応するブラウン運動が再帰的であるような場合に, 最近 [2] で得た熱核の詳細な挙動について紹介させて頂きたい.

主結果

M_i, $i = 1, \ldots, k$ を以下の条件を満たす非コンパクト完備リーマン多様体とする:

(a) 熱核 $p_i(t,x,y)$ が Li-Yau 型評価 (LY) を満たす.

(b) 放物型である. ここでは (a) の仮定から $\int^\infty \frac{sds}{V_i(x,s)} = \infty$ と同値である.

(c) Relative connected annuli 条件. 即ち, ある定数 $A > 1$ が存在し, 全ての十分大きな $r > 0$ に対して, 円環 $B(x,Ar)\backslash B(x,A^{-1}r)$ が連結である.

(d) 固定された点 $o_i \in M_i$ を中心とするボール $B(o_i,r)$ の体積 $V_i(r)$ が critical 条件, 又は subcritical 条件を満たす. ここで M_i が critical であるとは, 全ての十分大きな $r > 0$ に対して $V_i(r) \approx r^2$ のときをいい, subcritical であるとは, ある $C > 0$ が存在して

$$\int_1^r \frac{sds}{V_i(s)} \le C\frac{r^2}{V_i(r)}$$

であるときをいう. $\mathbb{R}^2$ は critical, $\mathbb{R}$ は subcritical である.

M を 上記 (a)-(d) を満たす多様体 $M_1, \ldots, M_k$ のコンパクト多様体 (中心部分) K による連結和 $K\#M_1\#\cdots\#M_k$ とするとき, M 上の熱核 $p(t,x,y)$ の挙動に関してまず次の結果を得た.

定理 1 ([2]) M の中心部分 K に点 $o \in K$ を固定する. このとき全ての $t > 2$ に対して

$$p(t,o,o) \approx \frac{C}{V_{\max}(\sqrt{t})} := \frac{C}{\max_i V_i(\sqrt{t})}$$

が成り立つ.

非放物型多様体の連結和の場合は [5] により $p(t,o,o) \approx \frac{C}{V_{\min}(\sqrt{t})} := \frac{C}{\min_i V_i(\sqrt{t})}$ が得られており, 放物型と非放物型で状況が劇的に異なることに注意する.

定理 1 と [3], [4] および [5] を用いると M の任意の 2 点に関してシャープな熱核評価を得ることができる．主張を述べるためにいくつかの記号を用意する．$x \in M_i$ と $t > 2$ に対し，

$$D_i(x,t) := \begin{cases} 1, & \text{if } |x| > \sqrt{t} \\ \frac{|x|^2 V_i(\sqrt{t})}{t V_i(|x|)}, & \text{if } |x| \le \sqrt{t}, \end{cases} \qquad U(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{\log|x|}, & \text{if } |x| > \sqrt{t} \\ \frac{1}{\log\sqrt{t}} \log\frac{e\sqrt{t}}{|x|}, & \text{if } |x| \le \sqrt{t}, \end{cases}$$

$$W(x,t) := \begin{cases} 1, & \text{if } |x| > \sqrt{t} \\ \frac{\log|x|}{\log\sqrt{t}}, & \text{if } |x| \le \sqrt{t} \end{cases}$$

と定める．ここで $|x| := d(x,K) + e$ とする．このとき次を得た．

定理 2 ([2]) *$x \in M_i$, $y \in M_j$ とする．*

(i) 全ての end が subcritical であるとき，

$$p(t,x,y) \asymp \frac{C D_i(x,t) D_j(y,t)}{V_i(x,\sqrt{t})} e^{-b\frac{d^2_{M\setminus K}(x,y)}{t}} + \frac{C}{V_{\max}(\sqrt{t})} e^{-b\frac{|x|^2+|y|^2}{t}}.$$

(ii) 少なくとも一つ critical な end が存在するとき

$(ii)_1$: M_i と M_j がともに subcritical であるならば，

$$p(t,x,y) \asymp \frac{C D_i(x,t) D_j(y,t)}{V_i(x,\sqrt{t})} e^{-b\frac{d^2_{M\setminus K}(x,y)}{t}} + \frac{C}{t} \left\{1 + (D_i(x,t) + D_j(y,t)) \log t\right\} e^{-b\frac{|x|^2+|y|^2}{t}}.$$

$(ii)_2$: M_i が subcritical で M_j が critical ならば，

$$p(t,x,y) \asymp \frac{C}{t} \left(1 + D_i(x,t) U(y,t) \log t\right) e^{-b\frac{|x|^2+|y|^2}{t}}.$$

$(ii)_3$: M_i と M_j が共に critical ならば，

$$\begin{aligned} p(t,x,y) \asymp & \frac{C}{V_i(x,\sqrt{t})} W(x,t) W(y,t) e^{-b\frac{d^2_{M\setminus K}(x,y)}{t}} \\ & + \frac{C}{t} \left\{U(x,t)U(y,t) + W(x,t)U(y,t) + U(x,t)W(y,t)\right\} e^{-b\frac{|x|^2+|y|^2}{t}}. \end{aligned}$$

ここで $i \ne j$ ならば $d_{M\setminus K}(x,y) = \infty$ と定める．

References

[1] A. Grigor'yan, *The heat equation on noncompact Riemannian manifolds* (in Russian). Mat. Sb., 182 (1991) no. 1, 55-87; English translation in Math. USSR-Sb., 72 (1992) no. 1, 47–77.

[2] A. Grigor'yan, S. Ishiwata, L. Saloff-Coste, *Heat kernel estimates on connected sums of parabolic manifolds*, in preparation.

[3] A.Grigor'yan and L. Saloff-Coste, *Dirichlet heat kernel in the exteior of a compact set.* Comm. Pure Appl. Math, 55 (2002), 93–133.

[4] A. Grigor'yan and L. Saloff-Coste, *Hitting probabilities for Brownian motion on Riemannian manifolds.* J. Math. Pures Appl., 81 (2002) no. 2, 115–142.

[5] A. Grigor'yan and L. Saloff-Coste, *Heat kernel on manifolds with ends.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 59 (2009) no. 5, 1917–1997.

[6] P. Li and S.-T. Yau, *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*, Acta Math., 156 (1986) no. 3-4, 153-201.

[7] L. Saloff-Coste, *A note on Poincaré, Sobolev, and Harnack inequalities.* Internat. Math. Res. Notices (1992), no. 2, 27–38.

RCD 空間上の Brown 運動の収束について

鈴木 康平

京都大学 理学研究科 数学教室 D3

E-mail: kohei0604@math.kyoto-u.ac.jp

概要

測度距離空間の列 $\mathcal{X}_n = (X_n, d_n, m_n)$ が, Riemann 的曲率次元条件 $\mathrm{RCD}^*(K, N)$ を満たし, $\mathrm{Diam}(X_n) \leq D$, $m_n(X_n) = 1$ を満たすとする．この時, 以下が同値になることを報告する．

(A)　$\mathcal{X}_n$ が measured Gromov–Hausdorff 収束する．

(B)　$\mathcal{X}_n$ 上の Brown 運動 $\mathbb{B}_n$ が法則収束する．

1　導入

完備可分測地距離空間 (X, d) に, 局所有限な Borel 測度 m を備えた測度距離空間 $\mathcal{X} := (X, d, m)$ の枠組みで, "**Ricci 曲率** $\geq K$, **次元** $\leq N$" という概念が, 近年幾つかのアプローチで導入されている (e.g. Lott–Villani [3], Sturm [4], Bacher–Sturm [1])．これらの枠組みでは, Cheeger エネルギー Ch と呼ばれる $\mathcal{X}$ 上の汎関数が定義されるが, 一般には 2 次形式にはならない．Erbar–Kuwada–Sturm [2] によって, "**Ricci 曲率** $\geq K$, **次元** $\leq N$" に加えて, **Ch が 2 次形式となる**, という条件を加えた, $\mathbf{RCD}^*(K, N)$ 条件 (Riemannian Curvature–Dimension condition) が導入された．例えば, Ricci 曲率 $\geq K$, 次元 $\leq N$ を満たす Riemann 多様体の列の measured Gromov–Hausdorff (mGH) 極限に現れる空間は, $\mathrm{RCD}^*(K, N)$ 条件を満たす．そして, Cheeger エネルギー Ch から定まる Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は, 強局所正則対称形式になることが知られており, 対応する拡散過程は, **Brown 運動**と呼ばれる．例えば, 完備連結 Riemann 多様体に Riemann 測度を備えた枠組みでは, Laplace–Beltrami 作用素から定まる Bronw 運動と一致する．

$RCD^*(K, N)$ 条件は mGH 収束に関して安定的であることが [2] によって示されている．すなわち, $\mathcal{X}_n$ が $RCD^*(K, N)$ を満たし, $\mathcal{X}_n \overset{mGH}{\to} \mathcal{X}_\infty$ ならば, $\mathcal{X}_\infty$ も $RCD^*(K, N)$ 条件を満たす．そこで以下のような問題を考える:

(Q)　空間の収束 $\mathcal{X}_n \overset{mGH}{\to} \mathcal{X}_\infty$ から, Brown 運動の法則収束 $\mathbb{B}_n \overset{law}{\to} \mathbb{B}_\infty$ が従うか?

ただし, 法則収束は, ある共通の完備距離空間 (X, d) に $\mathcal{X}_n$ を等長に埋め込んで考える (mGH 収束の下では, そういうことが可能である).

2　結果

本講演では, **(Q)** に対する答えとして, 以下の仮定 2.1 のもとで, 「空間の収束と Brown 運動の収束が同値である」事を報告する.

仮定 2.1　N, K, D を $1 < N < \infty$, $K \in \mathbb{R}$, $0 < D < \infty$ を満たす定数とする. 任意の $n \in \overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ に対して, $\mathcal{X}_n = (X_n, d_n, m_n)$ は測度距離空間で以下を満たすとする:

- $\mathrm{RCD}^*(K, N)$;
- $\mathrm{Diam}(X_n) \le D$;
- $m_n(X_n) = 1$.

ここで, $\mathrm{Diam}(X_n)$ は, X_n の直径を表す. 仮定 2.1 の下では, $\mathcal{X}_n$ 上に保存的な Brown 運動が任意の始点に関して一意的に存在することが分かり, これを $(\{B_t^n\}_{t \ge 0}, \{\mathbb{P}_x^n\}_{x \in X_n})$ とする.

主定理　仮定 2.1 の下で, 以下は同値:

(A)　**(空間の収束)**
$\mathcal{X}_n \overset{mGH}{\to} \mathcal{X}_\infty$.

(B)　**(埋め込んだ Brown 運動の法則収束)**
あるコンパクト距離空間 (X, d), 等長埋め込み $\iota_n : X_n \to X$ と, ある点列 $x_n \in X_n$ $(n \in \overline{\mathbb{N}})$ が存在して, 以下を満たす:

$$\iota_n(B_\cdot^n)_\# \mathbb{P}_n^{x_n} \overset{weak}{\to} \iota_\infty(B_\cdot^\infty)_\# \mathbb{P}_\infty^{x_\infty} \quad \text{in} \quad \mathcal{P}(C([0, \infty); X)).$$

ここで, $C([0, \infty); X) := \{w : [0, \infty) \to X : \text{連続}\}$ には, 局所一様距離を入れるものとする. また, $\mathcal{P}(C([0, \infty); X))$ は $C([0, \infty); X)$ 上の Borel 確率測度全体を表す. また, $f_\# m$ は, 可測写像 f による測度 m の押し出しを意味する.

参考文献

[1] K. Bacher and K.-T. Sturm, *J. Funct. Anal.*, **259**(1) (2010), 28–56.

[2] M. Erbar, K. Kuwada, and K.-T. Sturm, to appear in *Invent. math.*

[3] J. Lott and C. Villani, *Ann. Math.*, **169** (2009), no. 3, 903–991.

[4] K.-T. Sturm, *Acta Math.*, **196** (2006), 65–131.

Stability of heat kernel estimates and parabolic Harnack inequalities for jump processes on metric measure spaces

Takashi Kumagai (RIMS, Kyoto)

対称な拡散過程に関して、ガウス型の熱核評価が放物型 Harnack 不等式と同値であり、さらに volume doubling 条件+Poincaré 不等式とも同値であることはよく知られている。一方飛躍型確率過程において、これに相当する問題が研究されるようになったのは今世紀に入ってからであり、強い制約条件のもとで [1],[3] において同値条件が与えられていた。本講演では、volume doubling を満たす一般の測度つき距離空間において熱核評価や Harnack 不等式の同値条件を与えた、Z.-Q. Chen 氏、J. Wang 氏との共同研究 [2] の報告を行う。

1. Framework and definition

Let (M, d) be a locally compact separable metric space, and let μ be a positive Radon measure on M with full support. We assume $diam\, M = \infty$ for simplicity.

Assume that $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ is a conservative regular Dirichlet form on $L^2(M, \mu)$ such that

$$\mathcal{E}(f,g) = \int_{M\times M\setminus d} (f(x) - f(y)(g(x) - g(y))n(dx, dy) =: \int_M d\Gamma(f,g), \qquad \forall f, g \in \mathcal{F}.$$

Let $\{X_t\}_{t\ge 0}$ be the corresponding pure jump process. Assume further that for μ-a.a. $x \in M$ there exists $N(x, \cdot)$ on M such that

$$n(A,B) = \int_A \mu(dx) \int_B N(x, dy), \qquad \forall A, B \in \mathcal{B}(M),\ A\cap B = \emptyset.$$

Volume and time scale

Set $V(x,r) := \mu(B(x,r))$. Assume that there exist $c_1, c_2 > 0$, $d_2 \ge d_1 > 0$ such that

$$c_1\Big(\frac{R}{r}\Big)^{d_1} \le \frac{V(x,R)}{V(x,r)} \ \le\ c_2\Big(\frac{R}{r}\Big)^{d_2} \qquad \text{for every } 0 < r < R < \infty, x \in M. \tag{1}$$

Let $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ be a strictly increasing continuous function with $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$ and there exist constants $c_3, c_4 > 0$ and $\beta_2 \ge \beta_1 > 0$ such that

$$c_3\Big(\frac{R}{r}\Big)^{\beta_1} \le \frac{\phi(R)}{\phi(r)} \ \le\ c_4\Big(\frac{R}{r}\Big)^{\beta_2} \qquad \text{for every } 0 < r < R < \infty. \tag{2}$$

Definition/Condition:

• HK(ϕ): There exists a jointly continuous heat kernel $p_t(x, y)$ such that

$$p(t,x,y) \asymp \frac{1}{\mu(B(x,\phi^{-1}(t)))} \wedge \frac{t}{\mu(B(x,d(x,y)))\phi(d(x,y))}, \quad \forall x, y \in M, t > 0.$$

We write UHK(ϕ) if $\le$ holds and write UHKD(ϕ) if $p_t(x, x) \le c/\mu(B(x, \phi^{-1}(t)))$.

• J_ϕ: For μ-a.a. $x \in M$, $N(x, \cdot)$ is absolutely continuous w.r.t. μ, and for for μ-a.a. $(x, y) \in M \times M \setminus d$, the Radon-Nikodym derivative $J(\cdot, \cdot)$ satisfies

$$\frac{c_1}{V(x,d(x,y))\phi(d(x,y))} \le J(x,y) \le \frac{c_2}{V(x,d(x,y))\phi(d(x,y))}. \tag{3}$$

We write $J_{\phi,\le}$ (resp. $J_{\phi,\ge}$) if the upper (resp. lower) bound in (3) holds.

• Faber-Krahn inequality FK(ϕ): $\exists C_M, \nu > 0$ such that $\forall B(x, r)$, $\forall D \subset B(x, r)$,

$$\lambda_1(D) := \inf\Big\{\frac{\mathcal{E}(f,f)}{\|f\|_2^2} : f \in \mathcal{F}_D, f \ne 0\Big\} \ge \frac{C_M}{\phi(r)}\Big(\frac{V(x,r)}{\mu(D)}\Big)^{\nu}.$$

• CSJ(ϕ): $\exists C_0 \in (0,1]$, $C_1, C_2 > 0$ such that $\forall R \geq r > 0$ and μ-a.a. $x \in M$, $\exists$ a cut-off function $\varphi \in \mathcal{F}_b$ for $B(x,R) \subset B(x,R+r)$ (i.e. $\varphi|_{B(x,R)} = 1$, $\varphi|_{B(x,R+r)^c} = 0$) so that

$$\int_{B(x,R+(1+C_0)r)} f^2\, d\Gamma(\varphi,\varphi) \leq C_1 \int_{U\times U^*} (f(x)-f(y))^2 n(dx,dy) + \frac{C_2}{\phi(r)} \int_{B(x,R+(1+C_0)r)} f^2\, d\mu,$$

for all $f \in \mathcal{F}$ where $U = B(x,R+r)\setminus B(x,R)$, $U^* = B(x,R+(1+C_0)r)\setminus B(x,R-C_0r)$.

• Parabolic Harnack inequality PHI(ϕ): $\forall \lambda \in (0,1], \exists C_\lambda > 0$ such that $\forall u(t,x)$ caloric function (i.e. satisfies $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \mathcal{L}u(t,x)$ in the weak sense) in $(t_0, t_0+\lambda\phi(R))\times B(x_0,R)$,

$$\sup_{Q_-} u \leq C_\lambda \inf_{Q_+} u,$$

where $Q_- := (t_0+\lambda\phi(R)/4, t_0+\lambda\phi(R)/2)\times B(x_0,R/2)$, $Q_+ := (t_0+3\lambda\phi(R)/4, t_0+\lambda\phi(R))\times B(x_0,R/2)$.

• UJS: μ-a.a. $x \in M$, $\forall A \in \mathcal{B}(M)$ with $d(x,A) > 0$, it holds that

$$N(x,A) \leq \frac{c}{V(x,r)} \int_{B(x,r)} \int_A N(z,du)\, \mu(dz), \qquad \forall r \leq \frac{1}{2} d(x,A).$$

• NDL(ϕ): $\exists \varepsilon \in (0,1), c > 0$ such that $\forall x_0 \in M$, $r > 0$, $t \leq \phi(\varepsilon r)$ and $B = B(x_0,r)$,

$$p_t^B(x',y') \geq \frac{c}{V(x_0,\phi^{-1}(t))}, \quad x',y' \in B(x_0,\varepsilon\phi^{-1}(t)).$$

• PI(ϕ) (Poincaré inequality): $\exists C_P$ such that $\forall B = B(x,r)$ and $f \in \mathcal{F}$,

$$\int_B \Big(f - \frac{1}{\mu(B)}\int_B f\, d\mu\Big)^2 d\mu \leq C_P \phi(r) \int\int_{B\times B} (f(y)-f(x))^2 N(x,dy)\, \mu(dx).$$

• E_ϕ: $\exists c_1 > 1$ such that $\forall r > 0$, μ-a.a. $x \in M$, $c_1^{-1}\phi(r) \leq \mathbb{E}^x[\tau_{B(x,r)}] \leq c_1\phi(r)$, where $\tau_A := \inf\{t > 0 : X_t \in A^c\}$ for $A \subset M$.

2. Main theorems

Assume that M satisfies (1) and ϕ satisfies (2).

Theorem 1 *The following are equivalent:*
(*i*) HK(ϕ) (*ii*) $J_\phi + E_\phi$ (*iii*) $J_\phi +$ CSJ(ϕ).

Theorem 2 *The following are equivalent:*
(*i*) UHK(ϕ) (*ii*) UHKD(ϕ) $+ J_{\phi,\leq} + E_\phi$ (*iii*) FK(ϕ) $+ J_{\phi,\leq} +$ CSJ(ϕ).

Theorem 3 *The following are equivalent:*
(*i*) PHI(ϕ) (*ii*) UHK(ϕ)+NDL(ϕ)+UJS (*iii*) PI(ϕ)$+J_{\phi,\leq}$+UJS (*iv*) EHI$+E_\phi$+UJS.

Corollary 4 HK(ϕ) $\Longleftrightarrow$ PHI(ϕ) $+ J_{\phi,\geq}$.

参考文献

[1] M.T. Barlow, R.F. Bass and T. Kumagai. Parabolic Harnack inequality and heat kernel estimates for random walks with long range jumps. *Math. Z.* **261** (2009), 297–320.

[2] Z.-Q. Chen, T. Kumagai and J. Wang. Stability of heat kernel estimates and parabolic Harnack inequalities for jump processes on metric measure spaces. In preparation.

[3] A. Grigor'yan, J. Hu and K.-S. Lau. Estimates of heat kernels for non-local regular Dirichlet forms. *Trans. Amer. Math. Soc.* **366** (2014), 6397–6441.

Moduli of continuity of local times of random walks on graphs

D. A. Croydon (University of Warwick)

I will discuss results from the article *Moduli of continuity of local times of random walks on graphs in terms of the resistance metric* (Transactions of the London Mathematical Society 2 (2015), no. 1, 57-79). This establishes universal concentration estimates for the local times of random walks on weighted graphs. As a particular application of these, a modulus of continuity for local times is provided in the case when the graphs in question satisfy a certain volume growth condition with respect to the resistance metric. Moreover, it is explained how these results can be applied to self-similar fractals, for which they are shown to be useful for deriving scaling limits for local times and asymptotic bounds for the cover time distribution.

In order to provide more detail, the framework will now be introduced. In particular, let $G = (V(G), E(G))$ be a finite connected graph, where $V(G)$ denotes the vertex set and $E(G)$ the edge set of G. To avoid trivialities, we always assume that G has at least two vertices. Let $\mu^G : V(G)^2 \to \mathbb{R}_+$ be a weight function that is symmetric, i.e. $\mu^G_{xy} = \mu^G_{yx}$, and satisfies $\mu^G_{xy} > 0$ if and only if $\{x, y\} \in E(G)$. The associated discrete time simple random walk is then the Markov chain $((X^G_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P}^G_x, x \in V(G))$ with transition probabilities $(P_G(x, y))_{x,y\in V(G)}$ defined by

$$P_G(x, y) := \frac{\mu^G_{xy}}{\mu^G_x},$$

where $\mu^G_x := \sum_{y\in V(G)} \mu^G_{xy}$. We note that the invariant probability measure of this process is a multiple of the measure version of μ^G obtained by setting $\mu^G(\{x\}) := \mu^G_x$ for $x \in V(G)$. The process X^G has corresponding local times $(L^G_t(x))_{x\in V(G),t\geq 0}$, given by $L^G_0(x) = 0$ and, for $t \geq 1$,

$$L^G_t(x) := \frac{1}{\mu^G_x} \sum_{i=0}^{t-1} \mathbf{1}_{\{X^G_i = x\}}.$$

It is providing a modulus of continuity of these random functions in the spatial variable x that is the focus here.

For the statement of the local time bounds, as two important measures of the scale of a graph G, let

$$m(G) := \mu^G(V(G)), \qquad r(G) := \max_{x,y\in V(G)} R_G(x, y),$$

be its total mass with respect to the measure μ^G, and its diameter in the resistance metric (assuming edge $\{x, y\} \in E(G)$ is assigned conductance μ^G_{xy}), respectively. Note that the product $m(G)r(G)$ gives the maximal commute time of the random walk, and so gives a natural time-scaling. We also introduce the rescaled resistance metric $\tilde{R}_G(x,y) := r(G)^{-1}R_G(x,y)$.

The main result that will be presented is that, if a family of graphs $(G_i)_{i\in I}$ satisfy the following volume growth condition, $\tilde{R}_{G_i}(x,y)^{1/2}(1+\ln \tilde{R}_{G_i}(x,y)^{-1})^{1/2}$ provides, with uniformly high probability, a modulus of continuity for the rescaled local times $r(G_i)^{-1}L_t^{G_i}(x)$ in the spatial variable (uniformly over the appropriate time interval). Observe that the particular form of volume growth function that appears in the volume growth condition does not affect the modulus of continuity.

Definition 1. *A collection of finite connected weighted graphs $(G_i)_{i\in I}$ is said to satisfy* uniform volume growth with volume doubling (UVD) *if there exist constants $c_1, c_2, c_3 \in (0,\infty)$ such that*

$$c_1 v(r) \leq \mu^{G_i}\left(B_{G_i}(x,r)\right)$$

for every $x \in G_i$, $r \in [r_0(G_i), r(G_i)]$, $i \in I$, where

$$B_G(x,r) := \{y \in V(G) : \ R_G(x,y) < r\}$$

is the open ball in the resistance metric, and $r_0(G) := \min_{x,y\in V(G): x\neq y} R_G(x,y)$. Moreover,

$$m(G_i) \leq c_2 v(r(G_i))$$

for every $i \in I$, where $v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ is non-decreasing function with $v(2r) \leq c_3 v(r)$ for every $r \in \mathbb{R}_+$.

Theorem 2. *If $(G_i)_{i\in I}$ is a collection of graphs that satisfies UVD, then, for each $T > 0$,*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{i\in I} \max_{z\in V(G_i)} \mathbf{P}_z^{G_i}\left(\max_{x,y\in V(G_i)} \max_{0\leq t\leq Tm(G_i)r(G_i)} \frac{r(G_i)^{-1}\left|L_t^{G_i}(x) - L_t^{G_i}(y)\right|}{\sqrt{\tilde{R}_{G_i}(x,y)\left(1+\ln \tilde{R}_{G_i}(x,y)^{-1}\right)}} \geq \lambda \right) = 0.$$

After explaining the proof of this result, a number of examples will be presented. I will also discuss an application to the study of cover times of random walks on graphs.

安定過程に対する田中の公式

塚田大史（大阪市立大学大学院理学研究科）

1　はじめに

よく知られている田中の公式は，以下のようなブラウン運動 $B=(B_t)_{t\geq 0}$ に関するものである．

$$|B_t-a|-|B_0-a|=\int_0^t \mathrm{sgn}(B_s-a)dB_s+L_t^a.$$

ここで $a=0$ としておくと，マルチンゲール部分がレヴィの表現定理からブラウン運動だとわかるので，スコロホッド問題から $|B_t|$ がブラウン運動 B の 0 における反射壁過程となる．また, この田中の公式から凸関数に対する伊藤の公式へ一般化もされている．その他にも, 確率微分方程式の弱解の例などの研究が知られている．

ここでの田中の公式とは，局所時間をドゥーブ–メイエー分解によって非負値劣マルチンゲールとマルチンゲールの差で与える式として考える．そこで，局所時間 $L=\{L_t^a;a\in\mathbb{R},t\geq 0\}$ は以下のように滞在時間密度で定義しておく．

定義 1.1. 非負値確率変数の族 $L=\{L_t^a;a\in\mathbb{R},t\geq 0\}$ が任意の有界な非負値ボレル可測関数 f と $t\geq 0$ に対して

$$\int_0^t f(X_s)ds=\int_{\mathbb{R}} f(a)L_t^a da$$

を確率 1 で満たすとき, L を X の局所時間という．

対称安定過程に対しては [2] によって，対称レヴィ過程に対しては [1] によって研究されている．本講演では，指数 α $(1<\alpha<2)$ の安定過程に対する田中の公式を構成について報告する．

2　準備

確率過程 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ を指数 α $(1<\alpha<2)$ の 1 次元の安定過程とすると, X の $\mathbb{R}-\{0\}$ 上のレヴィ測度 ν_α は以下のように表される．

$$\nu_\alpha(dh)=\begin{cases} c_+|h|^{-\alpha-1}dh & \text{on } (0,\infty)\\ c_-|h|^{-\alpha-1}dh & \text{on } (-\infty,0)\end{cases}$$

ここで定数 $c_+,c_-\geq 0$ は，$c_++c_->0$ を満たすとする．また, X_1 の特性関数を ϕ とすればレヴィ–ヒンチン表現から，任意の $u\in\mathbb{R}$ に対して

$$\phi(u)=\exp\{-d|u|^\alpha(1-i\beta\mathrm{sgn}(u)\tan\frac{\pi\alpha}{2})\}$$

と書ける．ここで $d>0, \beta\in[-1,1]$ は，$d=\frac{c_++c_-}{2c(\alpha)}, \quad \beta=\frac{c_+-c_-}{c_++c_-}$ を満たし，$c(\alpha)=\frac{1}{\pi}\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ である．

ここで X の生成作用素 $\mathcal{L}$ は以下のように書ける．

$$\mathcal{L}f(x)=\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\{f(x+h)-f(x)-f'(x)h\}\nu_\alpha(dh).$$

フーリエ変換を用いると以下のようにも表せる．

$$\mathcal{L}f(x)=\mathcal{F}^{-1}\left[\eta(u)\mathcal{F}[f](u)\right](x).$$

定義から局所時間は形式的に

$$L_t^a=\int_0^t\delta_0(X_s-a)ds$$

となることがわかるので，以下の補題と伊藤の公式を用いて田中の公式を構成する．

補題 2.1. 関数

$$F(x)=c(-\alpha)\frac{1-\beta\mathrm{sgn}(x)}{d(1+\beta^2\tan^2\frac{\pi\alpha}{2})}|x|^{\alpha-1}$$

は X の生成作用素 $\mathcal{L}$ の基本解となる．すなわち，$\mathcal{L}F=\delta_0$ となる．

また，マルチンゲール部分については, $\mathbb{E}|X_t|^\gamma<\infty\ (0<\gamma<\alpha)$ となる指数 α の安定過程の絶対値モーメントの評価を用いる．

3 主結果

以下のような，指数 $\alpha\in(1,2)$ の安定過程に対する田中の公式が構成できる．

定理 3.1. 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$F(x)=c(-\alpha)\frac{1-\beta\mathrm{sgn}(x)}{d(1+\beta^2\tan^2\frac{\pi\alpha}{2})}|x|^{\alpha-1}$$

とする．このとき, 任意の $t\geq 0$, $a\in\mathbb{R}$ に対して

$$F(X_t-a)-F(X_0-a)=N_t^a+L_t^a$$

である．ここで N_t^a は, 2 乗可積分マルチンゲールであり，L_t^a は a に対する局所時間である．

参考文献

[1] P. Salminen and M. Yor. Tanaka formula for symmetric Lévy processes. *Séminaire de Probabilités*, XL, Lecture Notes in Math., No. 1899, pp. 265–285. Springer, 2007.

[2] K. Yamada. Fractional derivatives of local time of α-stable Levy processes as the limits of occupation time problem. *Limit Theorems in Probability and Statistics*, Vol. II, pp. 553–572. J. Bolyai Society Publications, 2002.

PARACONTROLLED CALCULUS AND FUNAKI-QUASTEL APPROXIMATION FOR KPZ EQUATION

MASATO HOSHINO (UNIV. TOKYO)

KPZ equation is the stochastic PDE

$$\partial_t h(t,x) = \frac{1}{2}\partial_x^2 h(t,x) + \frac{1}{2}(\partial_x h(t,x))^2 + \xi(t,x)$$

for $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{T}$. Here ξ is the space-time white noise, which is a family of Gaussian random variables such that

$$\mathbb{E}[\xi(t,x)\xi(s,y)] = \delta(t-s)\delta(x-y).$$

KPZ equation is ill-posed because it contains the square of the distribution $\partial_x h$. Usually the Cole-Hopf solution of KPZ equation is defined by $h_{\mathrm{CH}} = \log Z$, where Z is the solution of

$$\partial_t Z = \frac{1}{2}\partial_x^2 Z + Z\xi.$$

The simplest approximation to the Cole-Hopf solution is

$$\partial_t h_\epsilon = \frac{1}{2}\partial_x^2 h_\epsilon + \frac{1}{2}\{(\partial_x h_\epsilon)^2 - C_\epsilon\} + \xi_\epsilon(t,x),$$

where $\xi_\epsilon(t,x) = (\xi(t) * \eta_\epsilon)(x)$ is a smeared noise with a mollifier η_ϵ, and $C_\epsilon = \int(\eta_\epsilon(x))^2 dx$. Then the solution h_ϵ converges to the Cole-Hopf solution h_{CH}.

To consider the invariant measures, the following approximation is more convenient:

$$\partial_t h_\epsilon = \frac{1}{2}\partial_x^2 h_\epsilon + \frac{1}{2}\{(\partial_x h_\epsilon)^2 - C_\epsilon\} * \eta_\epsilon * \eta_\epsilon + \xi_\epsilon(t,x). \tag{1}$$

Funaki and Quastel ([1]) shows that the "stationary" solution h_ϵ converges to $h_{\mathrm{CH}}(t,x) + \frac{1}{24}t$ by using the following complicated transform:

$$\partial_t Z_\epsilon = \frac{1}{2}\partial_x^2 Z_\epsilon + \frac{1}{2}Z_\epsilon \left\{ \left(\frac{\partial_x Z_\epsilon}{Z_\epsilon}\right)^2 * \eta_\epsilon * \eta_\epsilon - \left(\frac{\partial_x Z_\epsilon}{Z_\epsilon}\right)^2 \right\} + Z_\epsilon \xi_\epsilon.$$

We consider the equation (1) by the paracontrolled calculus [2], without Cole-Hopf transform. Then the result in [1] can be extended to non-stationary solutions.

Theorem 1. *For every initial condition h_0, the maximal solution h_ϵ to (1) converses to $h_{CH}(t,x) + \frac{1}{24}t$.*

References

[1] Funaki, T., Quastel, J.: KPZ equation, its renormalization and invariant measures. Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput. 3 (2015), no. 2, 159—220.

[2] Gubinelli, M., Imkeller, Peter., Perkowski, N.: Paracontrolled distributions and singular PDEs. Forum Math. Pi 3 (2015), e6, 75 pp.

Error analysis for approximations to one-dimensional SDEs via perturbation method *

Nobuaki Naganuma (Mathematical Institute, Tohoku University)

1 Introduction and main result

For a one-dimensional fractional Brownian motion (fBm) B with the Hurst $1/3 < H < 1$, we consider a one-dimensional stochastic differential equation (SDE)

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s)\,d^\circ B_s, \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

where $x_0 \in \mathbf{R}$ is a deterministic initial value and $d^\circ B$ stands for the symmetric integral in the sense of Russo-Vallois. In order to approximate the solution to (1), we consider the Crank-Nicholson scheme as real-valued stochastic process on the interval $[0,1]$. In this talk, we study asymptotic error distributions of the scheme.

In what follows, we assume that the coefficients b and σ in (1) are smooth and they are bounded together with all their derivatives. We give the definition of the Crank-Nicholson scheme for the m-th dyadic partition $\{\tau_k^m = k2^{-m}\}_{k=0}^{2^m}$:

Definition 1.1 (The Crank-Nicholson scheme). For every $m \in \mathbf{N}$, the Crank-Nicholson scheme $X^{\mathrm{CN}(m)} : [0,1] \to \mathbf{R}$ is defined by a solution to an equation

$$\begin{cases} X_0^{\mathrm{CN}(m)} = x_0, \\ X_t^{\mathrm{CN}(m)} = X_{\tau_{k-1}^m}^{\mathrm{CN}(m)} + \dfrac{1}{2}\left\{ b(X_{\tau_{k-1}^m}^{\mathrm{CN}(m)}) + b(X_t^{\mathrm{CN}(m)}) \right\}(t - \tau_{k-1}^m) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\left\{ \sigma(X_{\tau_{k-1}^m}^{\mathrm{CN}(m)}) + \sigma(X_t^{\mathrm{CN}(m)}) \right\}(B_t - B_{\tau_{k-1}^m}) \quad \text{for } \tau_{k-1}^m < t \le \tau_k^m. \end{cases}$$

Since the Crank-Nicholson scheme is an implicit scheme, we need to restrict the domain of it and assure the existence of a solution to the equation above. Roughly speaking, the existence of the solution is ensured for large m.

In order to state our main result concisely, we set $\mathsf{w} = \sigma b' - \sigma' b$ and

$$J_t = \exp\left(\int_0^t b'(X_u)\,du + \int_0^t \sigma'(X_u)\,d^\circ B_u \right).$$

We assume the following hypothesis in order to obtain an expression of the error of the scheme:

*This talk is based on a joint work with Professor Shigeki Aida.

Hypothesis 1.2. $\inf \sigma > 0$.

The following is our main result:

Theorem 1.3. *Assume that Hypothesis* 1.2 *is satisfied. For* $1/3 < H < 1/2$*, we have*

$$\lim_{m\to\infty} 2^{m(3H-1/2)}\{X^{\mathrm{CN}(m)} - X\} = \sigma(X)U + J\int_0^{\cdot} J_s^{-1}\mathsf{w}(X_s)U_s\,ds$$

weakly with respect to the uniform norm. Here U *a stochastic process defined by*

$$U_t = \sigma_{3,H}\int_0^t f_{0,3}(X_u)\,dW_u, \tag{2}$$

where $\sigma_{3,H}$ *is a positive constant,* $f_{0,3} = (\sigma^2)''/24$ *and* W *is a standard Brownian motion independent of* B*.*

2 Sketch of proof

We explain the concept of perturbation method and give a sketch of proof of our main theorem.

The idea of perturbation method is to find a piecewise linear stochastic process $\tilde{h} \equiv \tilde{h}^{(m)} : [0,1] \to \mathbf{R}$ such that $X^{x_0,B+\tilde{h}}_{\tau^m_k} = X^{\mathrm{CN}(m)}_{\tau^m_k}$ for every $k = 1,\dots,2^m$, where $X^{x_0,B+\tilde{h}}$ is a solution to an SDE with the same initial value x_0 and a perturbed driver $B+\tilde{h}$, that is,

$$X^{x_0,B+\tilde{h}}_t = x_0 + \int_0^t b(X^{x_0,B+\tilde{h}}_s)\,ds + \int_0^t \sigma(X^{x_0,B+\tilde{h}}_s)\,d^{\circ}(B+\tilde{h})_s.$$

Under Hypothesis 1.2, we see unique existence of $\tilde{h}$ and obtain an expression of it.

From the expression of $\tilde{h}^{(m)}$ and the Lipschitz continuity of the solution map $B \mapsto X^{x_0,B}$, we construct a piecewise linear function $h \equiv h^{(m)} : [0,1] \to \mathbf{R}$ such that (a) $2^{m(3H-1/2)}h^{(m)}$ converges to U defined by (2) and (b) $\tilde{h}^{(m)} - h^{(m)}$ is negligible. We can show Assertion (a) by using the fourth moment theorem. Assertion (b) is a nontrivial part in our proof. In order to justify Assertion (b), we need the following step:

(D1) estimate $\delta^{(m)} = \max_{1\le k\le 2^m}|X^{\mathrm{CN}(m)}_{\tau^m_k} - X^{x_0,B}_{\tau^m_k}|$ from the definition of the scheme,

(H1) estimate $\|\tilde{h}^{(m)} - h^{(m)}\|_\infty$ by a quantity involving $\delta^{(m)}$ from the construction of $\tilde{h}^{(m)}$ and $h^{(m)}$,

(D2) estimate $\delta^{(m)}$ by a quantity involving $\delta^{(m)}$ itself from (H1),

(D3) show a sharp estimate of $\delta^{(m)}$ by using (D2) repeatedly and (D1),

(H2) show Assertion (b) from (D3) and (H1).

For simplicity, we explain how to see the asymptotic error distribution of $X^{\mathrm{CN}(m)}_1 - X^{x_0,B}_1$. By using the properties of $h^{(m)}$ and the decomposition

$$\begin{aligned} X^{\mathrm{CN}(m)}_1 - X^{x_0,B}_1 &= X^{x_0,B+\tilde{h}^{(m)}}_1 - X^{x_0,B}_1 \\ &= \nabla_{h^{(m)}}X^{x_0,B}_1 + \{X^{x_0,B+\tilde{h}^{(m)}}_1 - X^{x_0,B+h^{(m)}}_1\} + \{X^{x_0,B+h^{(m)}}_1 - X^{x_0,B}_1 - \nabla_{h^{(m)}}X^{x_0,B}_1\}, \end{aligned}$$

we see Theorem 1.3. In fact, Assertion (a) implies that the first term converges to a nontrivial process, that is, $2^{m(3H-1/2)}\nabla_{h^{(m)}}X^{x_0,B}_1 = \nabla_{2^{m(3H-1/2)}h^{(m)}}X^{x_0,B}_1 \to \nabla_U X^{x_0,B}_1$ as $m\to\infty$. The convergences of the second and third term to 0 follow from Assertion (a) and (b), respectively.

Feynman-Kac penalization problem for critical measure of symmetric stable processes

東北大学大学院理学研究科　　和田正樹

2015 年 12 月 16 日

1　考えたい問題及び準備

$\mathbb{M} = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, \{\mathbb{P}_x\}, \{X_t\})$ を生成作用素 $-(-\Delta)^{\alpha/2}$ とする $\mathbb{R}^d$ 上の過渡的な対称 α-安定過程とする。$p(t,x,y)$ を推移確率密度関数とすると、グリーン核 $G(x,y) = \int_0^\infty p(t,x,y)dt$ が定められる。以下、非負測度 μ はグリーン緊密、すなわち以下の 2 条件が成立しているとする。

$$\lim_{a\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{|x-y|\le a} G(x,y)\mu(dy) = 0, \qquad \lim_{R\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{|y|>R} G(x,y)\mu(dy) = 0$$

測度 μ と 1 対 1 にルヴューズ対応するような正値連続加法汎関数を A_t^μ とするときファインマン・カッツ汎関数が $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ により与えられ、新たな確率測度 $\mathbb{Q}_{x,t}^\mu$ が次のように定められる。

$$\mathbb{Q}_{x,t}^\mu(B) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]}\int_B \exp(A_t^\mu)\mathbb{P}_x(d\omega), \qquad B \in \mathscr{F}_t$$

本講演では、$\mathbb{Q}_{x,t}^\mu$ の $t\to\infty$ における極限分布を考察する (以下、ファインマン・カッツ処罰問題という)。そのための準備として、$\mathbb{M}$ に対応するディリクレ形式を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ とし、測度 μ の大きさを表すための指標を

$$\lambda(\mu) = \inf\left\{\mathcal{E}(u,u) \mid u\in\mathcal{F}, \quad (u,u)_\mu := \int_{\mathbb{R}^d} u^2(x)\mu(dx) = 1\right\}$$

と定め、シュレディンガー形式を $\mathcal{E}^\mu(u,u) = \mathcal{E}(u,u) - (u,u)_\mu$ で与える。

2　先行結果及び主結果

対称安定過程の枠組みでのファインマン・カッツ処罰問題を扱った先行研究の 1 つに、以下の結果がある。

定理 2.1. (竹田 [1, Theorem 1.1])

(1) $\lambda(\mu) > 1$ (μ が劣臨界的) のとき、シュレディンガー形式 $\mathcal{E}^\mu$ の生成作用素における調和関数が $h(x) = \mathbb{E}_x\left[\exp(A_\infty^\mu)\right]$ で与えられる。乗法汎関数 $L_t^h = \dfrac{h(X_t)}{h(X_0)}\exp(A_t^\mu)$ により、新たな確率測度 $\mathbb{P}_x^h$ を、有界な $\mathscr{F}_s$-可測確率変数 Z に対して $\mathbb{P}_x^h[Z] = \mathbb{P}_x[L_s^h Z]$ を満たすものとして定める。このとき、$t\to\infty$ で $\dfrac{\mathbb{E}_x[Z\exp(A_t^\mu)]}{\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]} \to \mathbb{E}_x^h[Z]$ が成立する (以下、$\mathbb{Q}_{x,t}^\mu \to \mathbb{P}_x^h$ と略記する)。

(2) $\lambda(\mu) < 1$ (μ が優臨界的) のとき、$\mathcal{E}^\mu$ の生成作用素の最大固有値 $C(\mu)$ は正である。$h(x)$ を固有値 $C(\mu)$ に対応する固有関数、乗法汎関数を $L_t^h = e^{-C(\mu)t}\dfrac{h(X_t)}{h(X_0)}\exp(A_t^\mu)$ とすると、$\mathbb{Q}_{x,t}^\mu \to \mathbb{P}_x^h$ である。

(3) $\lambda(\mu) = 1$(μ が臨界的) のとき、更に

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left(|x|^{d-\alpha}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\mu(dy)}{|x-y|^{d-\alpha}}\right) < \infty \tag{2.1}$$

を満たすとする。このとき、$h(x)$ を $\mathcal{E}^\mu$ の生成作用素における調和関数、すなわち $\mathcal{E}^\mu(h,h) = 0$ を満たす関数として、乗法汎関数を $L_t^h = \dfrac{h(X_t)}{h(X_0)}\exp(A_t^\mu)$ とすると、$\mathbb{Q}_{x,t}^\mu \to \mathbb{P}_x^h$ である。

μ が臨界的な場合に課される条件 (2.1) はチャコン・オルンシュタイン型のエルゴード定理を適用する上での十分条件としての役割を果たしていた。更に [1] では、この処罰問題の結果を応用して $d/\alpha > 2$ におけるファインマン・カッツ汎関数 $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ の $t\to\infty$ での増大度を求めている。然るに、[2] では $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ の増大度が $d/\alpha > 2$ の場合以外にも確立されており、その結果を応用すれば、チャコン・オルンシュタイン型のエルゴード定理を適用することなく、条件 (2.1) を緩めた条件下で処罰問題の結果が得られた。

定理 2.2. (W. 2015)　定理 2.1 (3) は、μ が次の条件を満たすときにも正しい。

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} G(x,y)\mu(dy)\mu(dx) < \infty. \tag{2.2}$$

尚、(2.1) $\Rightarrow$ (2.2) は、$G(x,y) = c_1|x-y|^{\alpha-d}$ 及びグリーン緊密の定義から得られるが、逆が成立しない例は次のように構成できる。

例 2.3. (W. 2015)　m をルベーグ測度、$\mu(dx) = \dfrac{m(dx)}{1+|x|^d}$ とすると、μ は (2.1) を満たさず (2.2) を満たす。

定理 2.2 を示すためには、ファインマン・カッツ汎関数の時間無限大での増大度を扱った [2, Theorem 1.1] を拡張して得られる以下の補題がカギになる。

補題 2.4. (W. 2015)　μ は臨界的で (2.2) を満たすとする。このとき、$h(x)$ を $\mathcal{E}^\mu$ の生成作用素における調和関数とし、ν をグリーン緊密で有限な非負測度とすると、$t\to\infty$ で以下の漸近挙動が成り立つ。

$$\mathbb{E}_x\left[e^{A_t^\mu}\right] \sim \frac{\alpha\Gamma(\frac{d}{2})\sin((\frac{d}{\alpha}-1)\pi)}{2^{1-d}\pi^{1-\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{d}{\alpha})\langle\mu,h\rangle}h(x)t^{\frac{d}{\alpha}-1},\quad \mathbb{E}_\nu\left[e^{A_t^\mu}\right] \sim \frac{\alpha\Gamma(\frac{d}{2})\sin((\frac{d}{\alpha}-1)\pi)\langle\nu,h\rangle}{2^{1-d}\pi^{1-\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{d}{\alpha})\langle\mu,h\rangle}t^{\frac{d}{\alpha}-1},\quad (1<d/\alpha<2)$$

$$\mathbb{E}_x\left[e^{A_t^\mu}\right] \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-d}\pi^{-\frac{d}{2}}\langle\mu,h\rangle}h(x)\frac{t}{\log t},\qquad \mathbb{E}_\nu\left[e^{A_t^\mu}\right] \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)\langle\nu,h\rangle}{2^{1-d}\pi^{-\frac{d}{2}}\langle\mu,h\rangle}\frac{t}{\log t},\qquad (d/\alpha=2)$$

$$\mathbb{E}_x\left[e^{A_t^\mu}\right] \sim \frac{\langle\mu,h\rangle}{(h,h)_m}h(x)t,\qquad \mathbb{E}_\nu\left[e^{A_t^\mu}\right] \sim \frac{\langle\mu,h\rangle\langle\nu,h\rangle}{(h,h)_m}t,\qquad (d/\alpha>2)$$

定理 2.2 は、$\mathscr{F}_s$-可測な有界確率変数 Z に対し、$\nu(B) = \mathbb{E}_x[Z\exp(A_s^\mu) : X_s\in B]$ として補題 2.4 を適用すれば得られる。尚、[2, Theorem 1.1] では、コンパクトな台をもつ μ について、$\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ の漸近挙動のみを扱っていた点で補題 2.4 よりも限定的であった。時間が許す限り、その拡張方法についても触れたい。

参考文献

[1] Takeda, M.: Feynman-Kac penalisations of symmetric stable processes, Elect. Comm. in Probab. 15, 32–43, (2010).
[2] Takeda, M and Wada, M.: Large time asymptotics of Feynman-Kac functionals for symmetric stable processes, preprint.

ON DOUBLY FELLER PROPERTY OF RESOLVENT

MILA KURNIAWATY, KAZUHIRO KUWAE AND KANEHARU TSUCHIDA
KUMAMOTO UNIVERSITY, FUKUOKA UNIVERSITY AND NATIONAL DEFENSE ACADEMY

1. Preliminary

Let (E,d) be a locally compact separable metric space, $E_\partial := E\cup\{\partial\}$ its one point compactification, $\mathcal{B}(E)$ its Borel σ-field on E, and $\mathcal{B}(E_\partial)$ Borel σ-field on E_∂. It is well-known that $\mathcal{B}(E_\partial) = \mathcal{B}(E)\cup\{B\cup\{\partial\}\mid B\in\mathcal{B}(E)\}$. Any function f defined on E is extended to E_∂ by setting $f(\partial)=0$. Denote by $\mathcal{B}_b(E)$ (resp. by $C_b(E)$), the family of bounded Borel functions on E (resp. the family of bounded continuous functions on E), and by $C_0(E)$ (resp. by $C_\infty(E)$), the family of continuous functions on E with compact support (resp. the family of continuous functions on E vanishing at infinity). Consider a Hunt process $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}_\infty, X_t, \zeta, \mathbf{P}_x)_{x\in E_\partial}$ defined on E_∂ and denote by $(P_t)_{t\geq 0}$ (resp. $(R_\alpha)_{\alpha>0}$) its transition semigroup (resp. its resolvent kernel), that is, $P_tf(x) = \mathbf{E}_x[f(X_t)] = \int_\Omega f(X_t(\omega))\mathbf{P}_x(\mathrm{d}\omega)$ (resp. $R_\alpha f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}P_tf(x)\mathrm{d}t$) for $f\in\mathcal{B}_b(E_\partial)$. Here $\zeta := \inf\{t\geq 0\mid X_t=\partial\}$ is the life time of $\mathbf{X}$ and ∂ is a cemetery point of $\mathbf{X}$, that is, $X_t=\partial$ for all $t\geq\zeta$ under $\mathbf{P}_x$ for $x\in E$. The resolvent $(R_\alpha)_{\alpha>0}$ of $\mathbf{X}$ is said to have the *Feller property* if the following two conditions are satisfied:

(i)' For each $\alpha>0$ and $f\in C_\infty(E)$, we have $R_\alpha f\in C_\infty(E)$.
(ii)' For each $f\in C_\infty(E)$ and $x\in E$, we have $\lim_{\alpha\to\infty}\alpha R_\alpha f(x) = f(x)$.

It is known that (i)' and (ii)' together imply

(iii)' For each $f\in C_\infty(E)$, we have $\lim_{t\to 0}\|P_tf-f\|_\infty = 0$.

The resolvent $(R_\alpha)_{\alpha>0}$ is said to have the *strong Feller property* if

(iv)' For each $f\in\mathcal{B}_b(E)$ and $\alpha>0$, we have $R_\alpha f\in C_b(E)$.

The Hunt process $\mathbf{X}$ is said to have the *doubly resolvent Feller property* if its resolvent enjoys the both of Feller property and strong Feller property. $\mathbf{X}$ is said to be a *doubly resolvent Feller process* if it enjoys the doubly resolvent Feller property.
For each $B\in\mathcal{B}(E)$, denote by σ_B the *hitting time to* B; $\sigma_B := \inf\{t>0\mid X_t\in B\}$ and by τ_B the *first exit time from* B; $\tau_B := \inf\{t>0\mid X_t\notin B\}$. Note that $\tau_B = \sigma_{E\setminus B}\wedge\zeta$.
Let ∂^*B be the boundary of B in E_∂. We set $C_\infty(B) := \{f\in C(B)\mid \lim_{x\to z\in\partial^*B} f(x)=0\}$. The open set B is said to be *regular* if for each $z\in\partial^*B\cap E$, we have $\mathbf{P}_z(\sigma_{E\setminus B}=0)=1$.

2. Doubly resolvent Feller property with multiplicative functionals

Let $(Z_t)_{t\geq 0}$ be a multiplicative functional associated with $\mathbf{X}$. Namely, for each $x\in E$, $\mathbf{P}_x$-a.s.: $Z_0=1$, $0\leq Z_t<\infty$, $Z_t\in\mathcal{F}_t$ for $t\geq 0$; and $Z_{t+s} = Z_s\cdot(Z_t\circ\theta_s)$, for all $t,s\geq 0$. Fix a non-empty open set B. We now impose a set of special conditions to $(Z_t)_{t\geq 0}$ as follows:

$(\mathrm{a})_B$ For some $t>0$, $a_t^B := \sup_{x\in B}\sup_{s\in[0,t]}\mathbf{E}_x[Z_s : s<\tau_B]<\infty$.
$(\mathrm{a})_B^*$ There exists $p>1$ such that $a_t^B(p) := \sup\limits_{x\in B}\sup\limits_{s\in[0,t]}\mathbf{E}_x[Z_s^p : s<\tau_B]<\infty$ for some $t>0$.

(b)^w_B For each $t>0$ and any compact subset K of B, there exists a number $p=p(K,t)>1$ such that $\sup_{x\in K}\mathbf{E}_x\left[Z_t^p\right]<\infty$.

(b)^s_B For each $t>0$, there exists a number $p=p(t)>1$ such that $\sup_{x\in B}\mathbf{E}_x\left[Z_t^p\right]<\infty$.

(c)^w_B For any relatively compact open subset D of B, we have $\lim_{t\to0}\sup_{x\in D}\mathbf{E}_x[|Z_t-1|:t<\tau_D]=0$.

(c)^s_B $\lim_{t\to0}\sup_{x\in B}\mathbf{E}_x[|Z_t-1|:t<\tau_B]=0$.

Theorem 2.1 (Compare [1, Theorem 1.4])**.** *Let $\mathbf{X}$ be a doubly resolvent Feller process and B an open subset of E. Under* (a)$_B$*,* (b)^w_B *and* (c)^w_B*,for any $\alpha>\alpha_0^B:=\inf_{s\in]0,\infty[}\log(a_s^B)^{1/s}\geq0$, $S_\alpha^Bf(x):=\mathbf{E}_x\left[\int_0^{\tau_B}e^{-\alpha t}Z_tf(X_t)\mathrm{d}t\right]$ satisfies $S_\alpha^Bf\in C_b(B)$ for $f\in\mathcal{B}_b(B)$.*

Theorem 2.2 (Compare [1, Theorem 1.4])**.** *Let $\mathbf{X}$ be a doubly resolvent Feller process and B an open subset of E. Suppose that B is regular. Under* (a)$_B$*,* (b)^s_B *and* (c)^s_B*, for any $\alpha>\alpha_0^B:=\inf_{s\in]0,\infty[}\log(a_s^B)^{1/s}\geq0$, we have $S_\alpha^Bf\in C_\infty(B)$ and $\lim_{\alpha\to\infty}\alpha S_\alpha^Bf(x)=f(x)$ for $f\in C_\infty(B)$ and $x\in B$. Suppose further that B is relatively compact and assume* (a)$^*_B$ *or there exists an open set C with $\overline{B}\subset C$ such that* (c)^s_C *holds. Then $S_\alpha^Bf\in C_\infty(B)$ for $f\in\mathcal{B}_b(B)$.*

3. Doubly resolvent Feller property of time changed process

Assume that $\mathbf{X}$ is an $\mathfrak{m}$-symmetric Markov process on E whose Dirichlet form $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ on $L^2(E;\mathfrak{m})$ is regular. Let $S_1(\mathbf{X})$ be the family of positive smooth measures in the strict sense, that is, any $\nu\in S_1(\mathbf{X})$ is a Revuz measure of a PCAF B_t in the strict sense: $\int_Ef(x)\nu(\mathrm{d}x)=\uparrow\lim_{t\downarrow0}\frac{1}{t}\mathbf{E}_{\mathfrak{m}}\left[\int_0^tf(X_s)\mathrm{d}B_s\right]$. A measure $\nu\in S_1(\mathbf{X})$ is said to be in the *Kato class* of $\mathbf{X}$ if $\lim_{\alpha\to\infty}\sup_{x\in E}R_\alpha\nu(x)=0$ and $\nu\in S_1(\mathbf{X})$ is said to be in the *local Kato class* of $\mathbf{X}$ if $\mathbf{1}_G\nu$ is of Kato class for any relatively compact open set G. Denote by $S^1_K(\mathbf{X})$ (resp. $S^1_{LK}(\mathbf{X})$) the family of measures of Kato class (resp. local Kato class).

For $\nu\in S_1(\mathbf{X})$ and its associated PCAF B in the strict sense, let $(\check{\mathbf{X}},\nu)$ be the time changed process defined by $(\check{\mathbf{X}},\nu):=(\Omega,X_{\tau_t},\mathbf{P}_x)_{x\in\tilde{Y}}$, where $\tau_t:=\inf\{s>0\mid B_s>t\}$ is the right continuous inverse of the PCAF B_t and $\tilde{Y}$ is the fine support of ν defined by $\tilde{Y}:=\{x\in E\mid\mathbf{P}_x(R=0)=1\}$ with $R:=\inf\{t>0\mid B_t>0\}$. It is known that $(\check{\mathbf{X}},\nu)$ is a ν-symmetric right process on $\tilde{Y}$ and it can be realized as a Hunt process on $Y:=\mathrm{supp}[\nu]$ (consequently on $\tilde{Y}$) (see [2, 3]).

Theorem 3.1. *Suppose that $\mathbf{X}$ enjoys the doubly Feller property of resolvent. Assume $\nu\in S^1_{LK}(\mathbf{X})$. Then the time changed process $(\check{\mathbf{X}},\nu)$ enjoys the doubly Feller property of resolvent. More strongly, $\check{R}_\beta\varphi(x):=\mathbf{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\beta B_t}\varphi(X_t)\mathrm{d}B_t\right]$ satisfies $\check{R}_\beta\varphi\in C_b(E)$ (resp. $\check{R}_\beta\varphi\in C_\infty(E)$) for $\varphi\in\mathcal{B}_b(E)$ (resp. $\varphi\in\mathcal{B}_b(E)$ having compact support) and $\beta>0$.*

References

[1] Z.-Q. Chen and K. Kuwae, *On doubly Feller property*, Osaka J. Math. **46**, (2009), no. 4, 909–930.

[2] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, Second revised and extended edition. de Gruyter Studies in Mathematics, **19**. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011.

[3] K. Kuwae and S. Nakao, *Time changes in Dirichlet space theory*, Osaka J. Math. **28** (1991), no. 4, 847–865.

A REFINEMENT OF ANALYTIC CHARACTERIZATIONS OF GAUGEABILITY FOR GENERALIZED FEYNMAN-KAC FUNCTIONALS

桑江一洋 (K. Kuwae) 福岡大学理学部

1. Statement of result

この講演では金大弘氏と Mila Kurniawaty 氏との共同研究 [2] に基づき, 金氏との結果 [3] における条件が改善できたことを報告する. (E,d) を局所コンパクト可分距離空間, E_∂ をその一点コンパクト化とし, $\mathfrak{m}$ を $\mathrm{supp}[\mathfrak{m}]=E$ を満たす E 上の正値 Radon 測度とする. $\mathscr{B}(E)$ を E 上のボレル集合の全体, $\mathcal{B}(E)$ を E 上のボレル関数の全体, $\mathcal{B}_b(E)$ を E 上の有界ボレル関数の全体とする. $\mathbf{X}=(\Omega,X_t,\zeta,\{\mathbf{P}_x\}_{x\in E})$ を E 上の $\mathfrak{m}$-対称で**過渡的** (transient) なマルコフ過程とし, **既約性**の条件 **(I)** と**絶対連続性**の条件 **(AC)** を仮定する (これらの条件は講演内で言及する). $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $\mathbf{X}$ に対応する正則な対称ディリクレ形式とする.

A_t^μ を時間に関して局所有界変動な連続加法的汎関数で $\mu=\mu_1-\mu_2$ を対応する符号値 smooth 測度とし, $A_t^F:=\sum_{s\le t}F(X_{s-},X_s)$ を直積空間 $E\times E$ 上の対称で対角線上で退化する非負有界ボレル関数 F_1,F_2 で定義される $F=F_1-F_2$ に対応する非局所型加法汎関数とする. (N,H) をマルコフ過程 $\mathbf{X}$ の **Lévy 系**とする. $R_\alpha(x,y):=\int_0^\infty e^{-\alpha t}p_t(x,y)\mathrm{d}t$ を α-**位のレゾルヴェント核**, 0-**位のレゾルヴェント核**を**グリーン核**または**グリーン関数**という.
$S^1_K(\mathbf{X})$(resp. $S^1_D(\mathbf{X})$) を**加藤クラス** (resp. **ディンキンクラス**) の測度の全体とする:

- $\mu\in S^1_K(\mathbf{X}) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{\beta\to\infty}\sup_{x\in E}\int_E R_\beta(x,y)\mu(\mathrm{d}y)=0.$
- $\mu\in S^1_D(\mathbf{X}) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sup_{x\in E}\int_E R_\alpha(x,y)\mu(\mathrm{d}y)<\infty$ for $\forall/\exists\alpha>0.$

0-位のディンキンクラス測度を**グリーン有界測度**といい, その全体を $S^1_{D_0}(\mathbf{X})$ で表す: $\mu\in S^1_{D_0}(\mathbf{X}) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sup_{x\in E}\int_E R(x,y)\mu(\mathrm{d}y)<\infty.$
$u\in\mathcal{F}\cap C_\infty(E)$ で $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_D(\mathbf{X})$ を満たすものに対し, N_t^u を $u(X_t)-u(X_0)$ の**福島分解公式** ([1]) で出現するエネルギー零の連続加法的汎関数とする:

$$u(X_t)-u(X_0)=M_t^u+N_t^u\quad t\in[0,+\infty[\quad \mathbf{P}_x\text{-a.s. for all } x\in E. \tag{1.1}$$

ここで M_t^u は福島分解 (1.1) の**エネルギー有限なマルチンゲール加法的汎関数**と呼ばれる. 加法的汎関数 $A_t:=N_t^u+A_t^\mu+A_t^F$ を考え,

$$e_A(t):=\exp(A_t),\quad t\ge 0 \tag{1.2}$$

とする. 乗法的汎関数 (1.2) は一般化されたファインマン・カッツ半群 $(P_t^A)_{t\ge0}$ を定める:

$$P_t^Af(x):=\mathbf{E}_x[e_A(t)f(X_t)],\quad f\in\mathcal{B}_b(E),\ t\ge0. \tag{1.3}$$

$\mu_{\langle u\rangle}+\mu_1+\mu_2+N(F_1+F_2)\mu_H\in S^1_D(\mathbf{X})$ とする. $(\mathcal{Q},\mathcal{F})$ を (1.3) に対応する $L^2(E;\mathfrak{m})$ 上の閉 2 次形式とする. それは u のエネルギー測度 $\mu_{\langle u\rangle}$ と Lévy

系 (N,H) を用いて次で与えられる:

$$\mathcal{Q}(f,g) := \mathcal{E}(f,g) + \mathcal{E}(u,fg) - \mathcal{H}(f,g) \quad f,g\in\mathcal{F}. \tag{1.4}$$

ここで

$$\mathcal{E}(u,fg) := \frac{1}{2}\int_E f\mathrm{d}\mu_{\langle u,g\rangle} + \frac{1}{2}\int_E g\mathrm{d}\mu_{\langle u,f\rangle},$$

$$\mathcal{H}(f,g) := \int_E f(x)g(x)\mu(\mathrm{d}x) + \int_E\int_E f(x)g(y)(e^{F(x,y)}-1)N(x,\mathrm{d}y)\mu_H(\mathrm{d}x).$$

測度 $\eta\in S^1_{D_0}(\mathbf{X})$ に対し,

$$\lambda^{\mathcal{Q}}(\eta) := \inf\left\{\mathcal{Q}(f,f)\;\middle|\; f\in\mathcal{F}\cap C_0(E),\ \int_E f^2\mathrm{d}\eta = 1\right\}. \tag{1.5}$$

測度 $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_1^*$ を $\bar{\mu}_1 := N(e^{F+U}-(F+U)-1+F_1)\mu_H + \mu_1 + \frac{1}{2}\mu^c_{\langle u\rangle}$, $\bar{\mu}_1^* := N(e^{F_1+U}-(F_1+U)-1+F_1)\mu_H+\mu_1+\frac{1}{2}\mu^c_{\langle u\rangle}$ で定める．ここで $U(x,y) := u(x)-u(y)$ であり, $\mu^c_{\langle u\rangle}$ は u のエネルギー測度 $\mu_{\langle u\rangle}$ の連続部分である.

$S^1_{NK_1}(\mathbf{X})$ を**自然な半グリーン緊密な拡張加藤クラス測度**の全体, $S^1_{NK_\infty}(\mathbf{X})$ を**自然なグリーン緊密な加藤クラス測度**の全体とする (これらは講演の中で正確な定義を与える).

定理 1.1 (**計測可能性の解析的特徴付**). $\bar{\mu}_1^*\in S^1_{NK_1}(\mathbf{X})$, $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_K(\mathbf{X})$ と $\mu_2+N(F_2)\mu_H\in S^1_{D_0}(\mathbf{X})$ を仮定する．このとき以下は同値になる．(1) $\lambda^{\mathcal{Q}}(\bar{\mu}_1)>0$. (2) $\sup_{x\in E}\mathbf{E}_x[e_A(\zeta)]<\infty$ (計測可能性).

$S^1_{CS_1}(\mathbf{X})$ を**条件付半グリーン緊密な拡張加藤クラス測度**の全体, $S^1_{CS_\infty}(\mathbf{X})$ を**条件付きグリーン緊密な加藤クラス測度**の全体, $S^1_{DS_0}(\mathbf{X})$ を**条件付きグリーン有界な測度**の全体, , また semi-$S^1_K(\mathbf{X})$ を半条件付加藤クラス測度の全体とする (これらも講演の中で正確な定義を与える).

定理 1.2 (**劣臨界性の解析的特徴付**). $\bar{\mu}_1^*\in S^1_{CS_1}(\mathbf{X})$, $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_K(\mathbf{X})\cap$semi-$S^1_K(\mathbf{X})$ と $\mu_2+N(F_2)\mu_H\in S^1_{DS_0}(\mathbf{X})$ を仮定する．$R^A(x,y)$ を P^A_t に対応するグリーン核とする．このとき以下は同値になる.

(1) $\lambda^{\mathcal{Q}}(\bar{\mu}_1)>0$. (2) $\sup_{x\in E}\mathbf{E}_x[e_A(\zeta)]<\infty$ (計測可能性).
(2) $R^A(x,y)<\infty$ *for* $(x,y)\in E\times E\setminus\mathsf{d}$ (劣臨界性).

ここで $\mathsf{d} := \{(x,y)\mid R(x,y)=+\infty\}$. さらに追加条件を仮定すれば (1)-(3) は R^A と R が比較可能な条件と**条件付計測可能性** $\sup_{(x,y)\in E^2\setminus\mathsf{d}}\mathbf{E}^y_x[e_A(\zeta^y)]<\infty$ とも同値になる.

References

[1] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, Second revised and extended edition. de Gruyter Studies in Mathematics, **19**. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011.

[2] D. Kim, M. Kurniawaty and K. Kuwae, *A refinement of analytic characterizations of gaugeability for generalized Feynman-Kac functionals*, preprint, 2015.

[3] D. Kim and K. Kuwae, *Analytic characterizations of gaugeability for generalized Feynman-Kac functionals*, 2015, to appear in Transactions of Amer. Math. Soc.

[4] D. Kim and K. Kuwae, *General analytic characterization of gaugeability for Feynman-Kac functionals*, preprint (2013).

直積加法的汎関数の大偏差原理

防衛大学校　土田兼治

1　序

本講演では，二種類の加法的汎関数の直積についての大偏差原理を考える．ある確率過程の大偏差原理を証明するための有効な方法として Gärtner-Ellis の定理 [2, Theorem 2.3.6] がある．その定理は，
「その確率過程に対する対数モーメント母関数の微分可能性は，その確率過程に対する大偏差原理が成り立つための十分条件である」
ことを主張している．しかし，これは十分条件なので対数モーメント母関数の微分可能性が成立しなくても大偏差原理が成り立つことがある．ここでは，直接的には Gärtner-Ellis の定理は使えないが，その定理を援用することにより加法的汎関数の大偏差原理を証明できることを述べる．

本講演では，Lusin 空間 E 上の既約で過渡的な右過程 $\mathbf{M} = (P_x, X_t, \zeta)$ を考え (ζ は $\mathbf{M}$ の生存時間)，$\mathbf{M}$ に関するある滑らかな測度 μ と $E \times E$ 上の有界対称関数 $F(x, y)$ に対する加法的汎関数の大偏差原理を考える．ここで，A_t^μ は μ に Revuz 対応する連続加法的汎関数とし，$A_t^F = \sum_{0<s\le t} F(X_{s-}, X_s)$ とする．ここではその直積 (A_t^μ, A_t^F) を直積加法的汎関数と呼ぶことにし，その大偏差原理について得た結果を紹介する．m を E 上の full support な σ-有限測度とし，$\mathbf{M}$ は m-対称であるものとする．$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $(\mathbf{M}, X_t, \zeta)$ に関する準正則 Dirichlet 形式とする．そして，以下のような非局所的摂動をもつ形式的な Schrödinger 型作用素を考える:

$$\mathcal{H}^{\theta_1\mu,\theta_2 F} = \mathcal{H} + \theta_1\mu + \mu_H \mathbf{F}^{\theta_2}, \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

ここで，$\mathcal{H}$ は $\mathbf{M}$ の生成作用素とし，(1) の非局所的摂動項は

$$\mu_H \mathbf{F}^{\theta_2} f(x) := \int_E (e^{\theta_2 F(x,y)} - 1) f(y) N(x, dy), \quad x \in E$$

と表される．また $(N(x, \cdot), H_t)$ は $\mathbf{M}$ に関する Lévy system とし，μ_H は H の Revuz 測度とする．

2　クラス $\mathbf{K}_\infty, \mathbf{J}_\infty$

ここでは符号付き測度 μ と関数 F のクラスを定義する．

$$\mu_F(dx) = \left(\int_E F(x, y) N(x, dy)\right) \mu_H(dx) \tag{2}$$

とおく．

定義 2.1. (1) μ がクラス $\mathbf{K}_\infty$ に属するとは，任意の $\epsilon > 0$ に対し，$|\mu|$-有限なある Borel 集合 $K = K(\epsilon)$ と定数 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ が存在して，$|\mu|(B) < \delta$ となるすべての可測集合 $B \subset K$ に対して，

$$\|G(1_{K^c \cup B}|\mu|)\|_\infty < \epsilon$$

(2) F が $E \times E$ 上の有界対称関数で任意の $x \in E$ に対して $F(x, x) = 0$ とする．μ_F を (2) と定義したとき，$\mu_{|F|} \in \mathbf{K}_\infty$ であるならば，F は $\mathbf{J}_\infty$ に属するという．

$\mu \in \mathbf{K}_\infty$，$F \in \mathbf{J}_\infty$ のとき，$u \in \mathcal{F}$ に対して $\mathcal{H}^{\theta_1\mu+\theta_2 F}$ の二次形式 $(-\mathcal{H}^{\theta_1\mu,\theta_2 F}u, u)$ が定義でき，

$$\mathcal{E}^{\theta_1\mu,\theta_2 F}(u, u) = \mathcal{E}(u, u) - \theta_1 \int_E u(x)^2 \mu(dx) - \int_E u(x)^2 \left(\int_E \left(e^{\theta_2 F(x,y)} - 1\right) N(x, dy)\right) \mu_H(dx)$$

と表されることが知られている．以下では，$\mu \in \mathbf{K}_\infty$，$F \in \mathbf{J}_\infty$ の場合だけを考える．

3　対数モーメント母関数

Schrödinger 型作用素 $\mathcal{H}^{\mu,F}$ に対する Feynman-Kac 半群を $T_t^{\mu,F}$ とおくと

$$T_t^{\mu,F} f(x) = \mathbb{E}_x \left[\exp \left(A_t^{\mu} + A_t^F \right) f(X_t) \right]$$

となり，これは $L^p(E;m)$ $(1 \le p \le \infty)$ 上で定義され強連続対称半群となる．そしてその L^p-スペクトルの下限が存在し，それを

$$\lambda_p(\mathbf{M},\mu,F) := -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|T_t^{\mu,F}\|_{p,p}$$

と書くことにする．直積加法的汎関数 (A_t^{μ}, A_t^F) に対する対数モーメント母関数を

$$C(\theta_1,\theta_2) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}_x \left[\exp \left(\theta_1 A_t^{\mu} + \theta_2 A_t^F \right); t < \zeta \right]$$

と定義する．

4　主定理

$C^*(\lambda_1,\lambda_2)$ を $C(\theta_1,\theta_2)$ の Fenchel-Legendre 変換，つまり，

$$C^*(\lambda_1,\lambda_2) = \sup_{(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2} (\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 - C(\theta_1,\theta_2))$$

とする．

定理 4.1 (直積加法的汎関数の大偏差原理)． $\mathbf{M}$ を右過程とし，その準正則 *Dirichlet* 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対して，すべての $k \ge 1$ に対して $m(E_k) < \infty$ である E の部分集合からなるコンパクトな $\mathcal{E}$-*nest* $\{E_k\}_{k\ge1}$ が存在するものとする．また，$\mathbf{M}$ はある $t = t_0$ と任意の $k \ge 1$ において $E_k \times E_k$ 上有界であるような推移密度関数 $p(t,x,y)$ をもつものとする．そしてすべての $(\theta_1,\theta_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\lambda_2(\mathbf{M};\theta_1\mu,\theta_2F) = \lambda_\infty(\mathbf{M};\theta_1\mu,\theta_2F)$ が成り立つと仮定する．そのとき，すべての $x \in E$ とすべての *Borel* 集合 $B \subset \mathbb{R}^2$ に対し，

$$\begin{aligned} -\inf_{(\lambda_1,\lambda_2)\in B^o} C^*(\lambda_1,\lambda_2) &\le \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_x \left(\left(\frac{A_t^{\mu}}{t}, \frac{A_t^F}{t} \right) \in B^o; t < \zeta \right) \\ &\le \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_x \left(\left(\frac{A_t^{\mu}}{t}, \frac{A_t^F}{t} \right) \in \overline{B}; t < \zeta \right) \\ &\le -\inf_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\overline{B}} C^*(\lambda_1,\lambda_2) \end{aligned}$$

が成り立つ．

注意 4.1. (1) この定理の証明の概要は講演で述べるが，先に述べたように直接的に Gärtner-Ellis の定理を用いることはできない．

(2) [1, Theorem 5.4] より，$\lambda_2(\mathbf{M};0,0) \le 0$ であるとき，定理 4.1 の仮定 $\lambda_2(\mathbf{M};\theta_1\mu,\theta_2F) = \lambda_\infty(\mathbf{M};\theta_1\mu,\theta_2F)$ が成り立つことが知られている．

参考文献

[1] Chen, Z.-Q.: Uniform integrability of exponential martingales and spectral bounds of non-local Feynman-Kac semigroups, In Stochastic Analysis and Applications to Finance, Essays in Honor of Jia-an Yan. (Eds by T. Zhang and X. Zhou), 2012. pp.55-75.

[2] Dembo, A., Zeitouni, O.: Large deviations techniques and applications, Second edition, Applications of Mathematics, **38**, Springer-Verlag, New York, (1998).

Free probabilistic analysis of random matrices converging to compact operators

Takahiro Hasebe (Hokkaido University)

Joint work with
Benoit Collins (Kyoto University)
Noriyoshi Sakuma (Aichi University of Education)

Free probability theory was originally developed to attack a problem in operator algebras, but in 1991 Voiculescu has found an unexpected application of free probability to eigenvalues of large random matrices [6]. Among random matrices, the most famous one is the GUE (Gaussian Unitary Ensemble) $G_n = (G_{ij}(n))_{i,j=1}^n$, that is, an $n \times n$ Hermitian matrices whose entries are i.i.d. complex Gaussian random variables. A lot of research has been done on how the random eigenvalues of G_n behave as $n \to \infty$. A recent progress is a deformation of GUE by a finite-rank perturbation:

$$X_n = G_n + A_n, \tag{$*$}$$

where G_n is a normalized A_n is an $n \times n$ matrix whose rank is bounded as $n \to \infty$. The eigenvalues of this model has been studied extensively in the last 10 years, e.g. in [1, 2, 3, 5].

In a recent preprint in 2015 [4], Shlyakhtenko found a free probabilistic method to analyze the above deformation of GUE. We will strengthen Shlyakhtenko's result and allow the rank of the perturbation A_n in $(*)$ to be unbounded. Then we analyze purely discrete eigenvalues of random matrices, e.g. of the form

$$Z_n = G_n A_n' G_n + A_n,$$

where A_n, A_n' are deterministic matrices converging to compact operators as $n \to \infty$. Since A_n, A_n' converge to compact operators, we show that the eigenvalues of Z_n converge almost surely to a purely discrete spectrum as $n \to \infty$. We establish a basic free probabilistic method to analyze this kind of purely discrete eigenvalues and then compute explicitly the limiting eigenvalues.

References

[1] Capitaine, M., Donati-Martin, C. and Féral, D. The largest eigenvalues of finite rank deformation of large Wigner matrices: convergence and nonuniversality of the fluctuations. *Ann. Probab.* 37 (2009), no. 1, 1–47.

[2] Péché, S. The largest eigenvalues of small rank perturbations of Hermitian random matrices. *Probab. Theory Related Fields* **134** (2006), 127–174.

[3] Pizzo, A., Renfrew, D and Soshnikov, A. On finite rank deformations of Wigner matrices. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*. **49** (2013), no. 1, 64–94.

[4] Shlyakhtenko, D. Free probability of type B and asymptotics of finite-rank perturbations of random matrices. arXiv:1509.08841v1

[5] Tao, T. Outliers in the spectrum of iid matrices with bounded rank perturbations. *Probab. Theory Related Fields*, **155** (2013), no. 1-2, 231–263.

[6] Voiculescu, D. Limit laws for random matrices and free products. *Invent. Math.* **104** (1991), no. 1, 201–220.

自由レヴィ過程の分布の単峰性について

佐久間紀佳

長谷部 高広 氏（北海道大学）との共同研究 *

平成２７年１２月１６日（水）14:30〜15:10

1　背景・概要

$\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度 μ が単峰であるとはある $c \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\mu(\mathrm{d}t) = \mu(\{c\})\delta_c(\mathrm{d}t) + f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1.1}$$

であることをいう．ここで $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ は $(-\infty, c)$ 上非減少, (c,∞) 上非増加であるとする．このとき c はモードと呼ばれる．確率過程が単峰であるとはすべての周辺分布が単峰であることとする．自由確率論において単峰性の研究は Biane (1999) によりすべての安定分布が単峰であることを示されたことから始まり, その後, Haagerup and Thorbjørnsen (2014) により自由ガンマ分布が単峰であることが示された．その技術を用いて, Hasebe and Thorbjørnsen (2015) によりすべての自由自己分解可能分布が単峰であることをが示された．今回の講演では次のことを解説する

(U1) 対称自由 Lévy 過程が単峰であることとその周辺分布が自由 Jurek クラスに入ることが同値である．

(U2) すべての自由 Lévy 過程で有界な台をもつレヴィ測度を持つものは十分大きい時間で単峰な周辺分布を持つようになる．

このことを示すにあたり下記の自由 Lévy 過程の周辺分布の性質も示せた:

(At) 自由 Lévy–Khintchine 表現を用いて分布が atom を持つ時を特徴づける

(De) 自由 Lévy–Khintchine 表現を用いて連続な分布になる時を特徴づける

2　自由無限分解可能分布

G_μ を $\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ の Cauchy 変換とする:

$$G_\mu(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x}\,\mu(dx), \qquad z \in \mathbb{C}^+, \tag{2.1}$$

F_μ を G_μ の逆数とする:

$$F_\mu(z) := \frac{1}{G_\mu(z)}, \qquad z \in \mathbb{C}^+, \tag{2.2}$$

* T. Hasebe was supported by Marie Curie Actions – International Incoming Fellowships (Project 328112 ICNCP) and Grant-in-Aid for Young Scientists (B) 15K17549, JSPS. N. Sakuma is supported by Scientific Research(C) 15K04923, JSPS.

これは μ の reciprocal Cauchy transform と呼ばれる.

$$\Gamma_{\lambda,M} := \{z \in \mathbb{C}^+ \mid \mathsf{Im}(z) > M,\ |\mathsf{Re}(z)| < \lambda \mathsf{Im}(z)\}. \tag{2.3}$$

に対して, Bercovici and Voiculescu (1993) で任意の $\lambda > 0$ に対してある $\alpha, \beta, M > 0$ が存在して F_μ が $\Gamma_{\alpha,\beta}$ で univalent で $F_\mu(\Gamma_{\alpha,\beta}) \supset \Gamma_{\lambda,M}$ であることが示された. そして合成に対する右逆元写像 $F_\mu^{-1} \colon \Gamma_{\lambda,M} \to \mathbb{C}^+$, すなわち $\Gamma_{\lambda,M}$ 上 $F_\mu \circ F_\mu^{-1} = \mathrm{Id}$ であるものが取れることを示した.

free cumulant transform (または R-transform とも呼ばれる) は以下で定義される:

$$\mathcal{C}_\mu(z) = zF_\mu^{-1}(1/z) - 1, \qquad 1/z \in \Gamma_{\lambda,M}. \tag{2.4}$$

これは Voiculescu transform の変形でもある:

$$\varphi_\mu(z) := F_\mu^{-1}(z) - z = z\mathcal{C}_\mu(1/z), \qquad z \in \Gamma_{\lambda,M}. \tag{2.5}$$

$\mathcal{C}_\mu$ は自由確率論における $\log \hat{\mu}$ の対応物で自由加法畳み込み $\boxplus$ を線形化する:

$$\mathcal{C}_{\mu \boxplus \nu}(z) = \mathcal{C}_\mu(z) + \mathcal{C}_\nu(z) \tag{2.6}$$

ここで z は両方の定義域の共通部分をとる.

$\mathbb{R}$ 上の確率測度が *FID* (自由無限分解可能分布) であるとは任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して自由畳込みに関する n^{th} 乗根が存在することである. 自由無限分解可能分布 μ の free cumulant transform に対して自由 Lévy–Khintchine 表現が与えられる:

$$\mathcal{C}_\mu(z) = \eta_\mu z + a_\mu z^2 + \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{1-tz} - 1 - tz1_{[-1,1]}(t)\Big)\nu_\mu(\mathrm{d}t), \qquad z \in \mathbb{C}^-, \tag{2.7}$$

ここで $\eta_\mu \in \mathbb{R}, a_\mu \geq 0$, ν_μ は $\mathbb{R}$ 上の測度で以下をみたすもの:

$$\nu_\mu(\{0\}) = 0, \qquad \int_{\mathbb{R}} \min\{1, t^2\}\, \nu_\mu(\mathrm{d}t) < \infty. \tag{2.8}$$

定義 2.1. μ が FID で ν はその自由 Lévy 測度とする. μ が自由 *s-selfdecomposable* であるとは ν がモード 0 をもつ単峰な測度であるときとする. 自由 s-selfdecomposable である分布全体の集合を $U(\boxplus)$ と記す. これを自由 *Jurek* クラスとよぶ.

自由自己分解可能分布は $U(\boxplus)$ の部分集合である.

定理 2.2. *μ を対称かつ FID とする. 以下は同値である:*

(1) $\mu^{\boxplus s}$ はすべての $s > 0$ で単峰.
(2) μ は $U(\boxplus)$ に属する.

定理 2.3. *μ を FID で自由レヴィ Lévy 測度 ν が $\mathsf{supp}(\nu) \subset [-M, M]$ をある $M > 0$ に対して満たしているとする. μ は一点分布でないとする. このとき $\mu^{\boxplus s}$ は $s \geq \frac{4M^2}{\sigma^2(\mu)}$ において単峰である. 定数 4 は optimal である.*

講演においてはこの結果を得るにあたって示せたこと, 関連する例を交えて上記 2 定理を紹介したい.

参考文献

[1] T. Hasebe and N. Sakuma(2015+). Unimodality for free Lévy processes. arXiv:1508.01285.

サイクル上のアダマールウォークの周期性について

横浜国立大学大学院工学研究院　竹居 正登

本講演は，今野紀雄氏・清水雄樹氏（横浜国立大学）との共同研究 ([4]) に基づく.

1　サイクル上のアダマールウォーク

$N \geq 3$ に対して，長さ N のサイクルを考える：頂点集合を $C_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ と表すことにする．2×2 のユニタリ行列 $U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{U}(2) = \mathrm{U}(2, \mathbb{C})$ に対応する，サイクル C_N 上の 2 状態量子ウォークを次のように定義する.

- $P = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$ を用いて $\boxed{P + Q = U}$ と分解する.
- 時刻 $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$, 位置 $x \in C_N$ における振幅 (amplitude) を $\Psi_n(x) = \begin{bmatrix} \Psi_n^L(x) \\ \Psi_n^R(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ で表し，$\mu_n(x) = |\Psi_n^L(x)|^2 + |\Psi_n^R(x)|^2$ を，時刻 n で位置 x にウォーカーが観測される「度合い」と考える.
- 振幅の関係式：$\boxed{\Psi_{n+1}(x) = P\Psi_n(x+1) + Q\Psi_n(x-1)}$,
  すなわち，$\begin{bmatrix} \Psi_{n+1}^L(x) \\ \Psi_{n+1}^R(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\Psi_n^L(x+1) + b\Psi_n^R(x+1) \\ c\Psi_n^L(x-1) + d\Psi_n^R(x-1) \end{bmatrix}$ と定める.
  （$x+1, x-1$ は mod N で考える.）
- 次の記号を導入すると $\boxed{\Psi_n = (U_N^{(s)})^n \Psi_0}$ と表すことができる：

$$U_N^{(s)} := \begin{bmatrix} O & P & O & O & \cdots & O & Q \\ Q & O & P & O & \cdots & O & O \\ O & Q & O & P & \cdots & O & O \\ O & O & Q & O & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \cdots & O & P \\ P & O & O & O & \cdots & Q & O \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Psi_n := {}^T\left[\begin{bmatrix} \Psi_n^L(0) \\ \Psi_n^R(0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Psi_n^L(1) \\ \Psi_n^R(1) \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \Psi_n^L(N-1) \\ \Psi_n^R(N-1) \end{bmatrix}\right] \in (\mathbb{C}^2)^N.$$

Dukes [1] に従って，$N = 2$ の場合の「サイクル」C_2 を，2 つの点 $0, 1$ とそれらを結ぶ 1 本の辺からなるグラフとし，$U_2^{(s)} = \begin{bmatrix} O & U \\ U & O \end{bmatrix}$ と定める.

量子ウォーク全般について，詳しくは [2, 3] を参照：特に，サイクル上の量子ウォークの基本性質については [2] にまとめられている.

2 周期性

n 次の単位行列を I_n と表し,

$$\mathscr{N} := \left\{ n \geq 1 : \ \left(U_N^{(s)}\right)^n = I_{2N} \right\}$$

とおく：

- $\mathscr{N} \neq \emptyset$ のとき,「量子ウォークは周期 $T_N := \min \mathscr{N}$ をもつ」という.
- $\mathscr{N} = \emptyset$ のとき,「量子ウォークは周期をもたない」といい，$T_N = \infty$ とする.

Dukes [1] は，サイクル上の量子ウォークのいくつかのクラスについて周期性を調べた．特に，ユニタリ行列 U が Hadamard 行列

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

で与えられるアダマールウォークについては,

$$T_2 = 2, \quad T_3 > 30, \quad T_4 = 8, \quad T_8 = 24$$

であるという結果を得た.

3 主結果

定理 3.1 ([4]). サイクル C_N 上のアダマールウォークの周期 T_N は,

$$T_N = \begin{cases} 2 & (N = 2), \\ 8 & (N = 4), \\ 24 & (N = 8), \\ \infty & (N \neq 2, 4, 8) \end{cases}$$

である.

参考文献

[1] Dukes, P. R. (2014). Quantum state revivals in quantum walks on cycles, Results in Physics **4**, 189–197.

[2] 今野紀雄 (2008). 量子ウォークの数理，産業図書.

[3] 今野紀雄 (2014). 量子ウォーク，森北出版.

[4] Konno, N., Shimizu, Y., and Takei, M. (2015). Periodicity for the Hadamard walk on cycles, arXiv:1504.06396

1 次元力学系の ESCAPE RATE を表す公式について

高橋　博樹

This is an excerpt from the paper [8] in preparation.

We are concerned with *open systems*, i.e., systems with orbits that escape from a bounded region of phase space in finite time. Open systems are often used as mathematical models of nonequilibrium processes.

Let M be a compact C^∞ Riemannian manifold equipped with a Lebesgue measure m, and $f\colon M \circlearrowleft$ a continuous map. For a Borel subset B of M define

$$\underline{E}(B) = \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log m\left(\bigcap_{k=0}^{n} f^{-k}(B)\right)$$

and

$$\overline{E}(B) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log m\left(\bigcap_{k=0}^{n} f^{-k}(B)\right).$$

Obviously, $\underline{E}(B) \leq \overline{E}(B) \leq 0$. If f satisfies Axiom A and $U \subset M$ a small neighborhood of a basic set Λ, Bowen and Ruelle [2, 3] proved a formula for escape rate

$$\underline{E}(U) = \overline{E}(U) = \sup\left\{h(\mu) - \sum \lambda_i^+(\mu)\colon \mu \text{ is an ergodic measure with } \mathrm{supp}(\mu) \subset U\right\},$$

where $h(\mu)$ denotes the entropy, $\sum \lambda_i^+(\mu)$ the sum of positive Lyapunov exponents of μ counted with multiplicity, and $\mathrm{supp}(\mu)$ denotes the support of μ. This number gives the rate of escape from U. In the case where Λ is an Axiom A attractor, no mass can escape and this number is zero. For non-attracting basic sets such as horseshoes, masses escape at exponential rate and this number is negative.

Eckmann and Ruelle [6] conjectured that this type of formula for escape rate still holds for a large class of dynamical systems which do not satisfy Axiom A. Up to present, however, the formula is known to hold only for a handful of such systems: rational maps or C^∞ maps on the interval with preperiodic critical points [5]; uniformly partially hyperbolic systems [9]; uniformly hyperbolic, Anosov or some Billiard systems with small holes (see e.g., [4, 7] and the references therein). On the other hand, a counterexample of C^∞ non-uniformly hyperbolic surface diffeomorphisms was constructed in [1] in which the conjectured formula does not hold.

The aim of this paper is to prove a formula for escape rate for a certain class of real one-dimensional maps. Let $X = [0, 1]$. A differentiable map $f\colon X \to X$ is called *of class C^3 with non-flat critical points* if it satisfies the following properties:

- the *critical set* $\mathrm{Crit}(f) = \{x \in X\colon Df(x) = 0\}$ is nonempty, and f is C^3 on $X \setminus \mathrm{Crit}(f)$;
- each critical point $c \in \mathrm{Crit}(f)$ is *non-flat*, i.e., there exist a number $\ell > 1$, called *the order of f at c*, and C^3 diffeomorphisms ϕ, ψ of $\mathbb{R}$ such that $\phi(c) = \psi(f(c)) = 0$ and for every x in a small neighborhood of c,
$$|\psi \circ f(x)| = |\phi(x)|^\ell.$$

Partially supported by the Grant-in-Aid for Young Scientists (A) of the JSPS, Grant No.15H05435.

Let $\mathcal{M}(f)$ denote the set of f-invariant Borel probability measures. For $\mu \in \mathcal{M}(f)$ let $h(\mu)$ denote the entropy of μ, and define the *Lyapunov exponent* $\lambda(\mu)$ by

$$\lambda(\mu) = \int \max\left\{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log|Df^n(x)|, 0\right\} d\mu(x),$$

which is a nonnegative finite number.

Let K be a closed subinterval of X. We consider an open dynamical system $f|_K \colon K \to X$. Define

$$\Lambda(K) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(K).$$

This is a compact, forward f-invariant set unless empty. We assume $\Lambda(K) \neq \emptyset$, and consider a dynamical system $f|_{\Lambda(K)} \colon \Lambda(K) \circlearrowleft$. In addition, we assume that any connected component of $K \cap f^{-1}(K)$ is not a singleton. We say $f|_{\Lambda(K)}$ is *topologically exact* if for any nonempty (relatively) open subset V of $\Lambda(K)$ there exists an integer $n \geq 1$ such that $f^n(V) = \Lambda(K)$.

Define a *pressure function* $t \in \mathbb{R} \mapsto P(K,t)$ by

$$P(K,t) = \sup\{h(\mu) - t\lambda(\mu) \colon \mu \in \mathcal{M}(f),\ \mathrm{supp}(\mu) \subset K\}.$$

Theorem A. *Let $f \colon X \to X$ be a map of class C^3 with non-flat critical points. Let K be a closed subinterval of X such that $f|_{\Lambda(K)}$ is topologically exact and all critical points of f in K are extrema. Then*

$$\underline{E}(K) = \overline{E}(K) = P(K,1).$$

A proof of Theorem A is briefly outlined as follows. We first show that $\underline{E}(K) = \overline{E}(K) = P(K,1) = 0$, provided there exists a periodic point in K which is not hyperbolic repelling, or $\Lambda(K)$ contains an interval. We then treat the case where all periodic points are hyperbolic repelling and $\Lambda(K)$ contains no interval. The result of Young [9, Theorem 4(1)] gives a lower estimate $\underline{E}(K) \geq P(K,1)$. A key ingredient for an upper estimate $\overline{E}(K) \leq P(K,1)$ is to construct a certain horseshoe *at each large inducing time*, by way of diffeomorphic pull-backs of intervals. We then use a Gibbs measure on the horseshoe to estimate from above the Lebesgue measure of the set of points which remain in K up to the inducing time.

If time permits, I will talk about Theorem B on the Hausdorff dimension of $\Lambda(K)$.

References

[1] Baladi, V., Bonatti, C. and Schmitt, B.: Abnormal escape rates from nonuniformly hyperbolic sets. Ergodic Theory and Dynamical Systems. **19**, 1111–1125 (1999)

[2] Bowen, R.: *Equilibrium states and the ergodic theory for Anosov diffeomorphisms,* Springer Lecture Notes in Math. **470** (1975).

[3] Bowen, R. and Ruelle, D.: The ergodic theory of Axiom A flows, Invent. Math. **29** (1975) 181–202

[4] Chernov, N., Markarian, R. and Troubetzkoy, S.: Conditionally invariant measures for Anosov maps with small holes. Ergod. Th. & Dynam. Sys. **18** (1998), 1049–1073.

[5] Contreras-Barandiarán, G.: Rate of escape of some chaotic Julia sets. Commun. Math. Phys. **133**, 197–215 (1990)

[6] Eckmann, J.-P. and Ruelle, D.: Ergodic Theory of chaos and strange attractors, Rev. Modern Physics **57** (1985), 617–656.

[7] Lopes, A. and Markarian, R.: Open billiards: invariant and conditionally invariant probabilities on Cantor sets. SIAM J. Appl. Math. **56** (1996), 651–680.

[8] Takahasi, H.: Escape rate in one-dimensional dynamics, in preparation

[9] Young, L.-S.: Some large deviation results for dynamical systems. Trans. Amer. Math. **318** 1990, 525–543.

Department of Mathematics, Keio University, Yokohama, 223-8522, Japan

E-mail address: hiroki@math.keio.ac.jp

区間力学系における大偏差原理の普遍性について

鄭　容武　(広島大学)*

有界閉区間 $X \subset \mathbb{R}$ 上の可微分写像 $f: X \to X$ の反復合成によってあたえられる力学系の大偏差原理について考える．間欠性カオスが現れる Pomeau-Manneville 写像族の力学系に対して，絶対連続不変確率測度の存在や中心極限定理が成立するかどうかには関わらず，大偏差原理はいつでも成り立つ [1]．また，特異点を持つ２次写像族の力学系に対して，十分多くのパラメータにおいて力学系の大偏差原理が成り立つことが知られているが，それは絶対連続不変確率測度が存在して中心極限定理が成立する場合に限られていた [2, 3]. 本講演では, 多項式写像に代表される，特異点を持つカオス的な可微分力学系に対して，大偏差原理が成り立つための判定条件について高橋博樹氏（慶應義塾大学)，Juan Rivera-Letelier 氏（米国 Rochester 大学）との共同研究によって得られた結果を紹介する．

まず，結果を正確に述べるための準備をする．有界閉区間 X 上の標準測度として（正規化された）Lebesgue 測度 m をとる．写像 $f: X \to X$ に対して（レベル２の）**大偏差原理** が成り立つとは, 次を満たす下半連続関数 $I\colon \mathcal{M} \to [0, \infty]$ が存在するときをいう:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log m\{x \in X\colon \delta_x^n \in \mathcal{G}\} \geq -\inf\{I(\nu)\colon \nu \in \mathcal{G}\} \quad \forall \mathcal{G} \subset \mathcal{M} \ \text{open};$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log m\{x \in X\colon \delta_x^n \in \mathcal{K}\} \leq -\inf\{I(\nu)\colon \nu \in \mathcal{K}\} \quad \forall \mathcal{K} \subset \mathcal{M} \ \text{closed}.$$

ここで, $\mathcal{M}$ は区間 X 上の Borel 確率測度全体が成すコンパクト距離空間を表し，$\delta_x^n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)}$, ただし δ_y は $y \in X$ に台を持つ Dirac 測度，とする．大偏差原理が成り立つとき, 上記の関数 I を **レート関数** とよぶ．レート関数のレベル集合がコンパクトであることは $\mathcal{M}$ のコンパクト性から明らかである．空でない任意の区間 J に対して $f^n(J) = X$ となるように自然数 n がとれるとき $f: X \to X$ は**位相完全 (topologically exact)** であるという．有界閉区間上の位相完全な連続写像は明記性をもつ．可微分写像 $f: X \to X$ に対して，$f'(c) = 0$ となる点 $c \in X$ を f の特異点とよび，有限個の特異点を持つとき f を **多峰写像 (multimodal map)** とよぶ．f の特異点 c に対して，定数 $l_c > 1$ と 微分同相写像 $\phi, \psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ がとれて $\phi(c) = \psi(f(c)) = 0$ かつ c の近傍の点 $x \in X$ について $|\psi(f(x)) = |\phi(x)|^{l_c}$ が成り立つとき c は **non-flat** であるという．また，すべての特異点の組 c_1, c_2 と自然数 j に対して $f^j(c_1) \neq c_2$ のとき f は **critical relation** を持たないという．f の周期点 p に対して, $|(f^k)'(p)| > 1$ のとき p は**双曲反発的 (hyperbolic repelling)** であるという．ここで，$k \geq 1$ は p の周期，すなわち $f^k(p) = p$ とする．

さて，本講演の主結果は次のとおりである

定理. 位相完全な C^3 級多峰写像 $f: X \to X$ は，特異点がすべて *non-flat* で *critical relation* を持たないとし，周期点がすべて双曲反発的であると仮定する．このとき，

科学研究費補助金 基盤研究 (C) 課題番号 24540212
*e-mail: chung@amath.hiroshima-u.ac.jp

$f: X \to X$ に対して大偏差原理が成り立つ．また，レート関数は，

$$I(\mu) = -\inf_{\mathcal{G}} \sup\{F(\nu) \colon \nu \in \mathcal{G}\}$$

であたえられる．ここで，

$$F(\mu) = \begin{cases} h(\mu) - \displaystyle\int \log|f'|d\mu & \textit{if } \ \mu \textit{ is } f\textit{-invariant}, \\ -\infty & \textit{otherwise}, \end{cases}$$

$h(\mu)$ は f-不変確率測度 μ に関する測度論的（*Kolmogorov-Sinai*）エントロピーである．

この定理では，従来の可微分力学系のエルゴード論的研究において，絶対連続不変確率測度の存在や中心極限定理の成立を示すために必要であった Collet-Eckmann 条件や Large derivative 条件といった特異軌道に沿った微分の増大率に関する条件が仮定されていない．

最後に，カオス力学系における大偏差原理の普遍性を示すものとして，単峰写像の場合について述べておく．可微分写像 $f: X \to X$ がただ 1 つの特異点を X の内点として持ち，それが non-flat かつ f の極値点であるとき，f を単峰写像 (**unimodal map**) とよぶ．C^3 級単峰写像 f に対して，その Schwartz 微分 $Sf = (f'''/f') - (3/2)(f''/f')^2$ が負のとき，f を S-単峰写像とよぶ．例えば，$X = [0,1]$ 上で 2 次関数 $f(x) = ax(1-x)$, $0 < a \leq 4$ は S-単峰写像である．S-単峰写像の力学系は次の 3 つのタイプに分類される [6]:

(i) ただ 1 つの吸引周期軌道を持つ；

(ii) 高々有限回くりこみ可能；

(iii) 無限回くりこみ可能．

ほとんどすべての S-単峰写像は (i) または (ii) のタイプであり，絶対連続不変確率測度を持つのは高々有限回くりこみ可能のときである [7]．一方，高々有限回くりこみ可能な S-単峰写像が絶対連続不変確率測度を持つとは限らない [5]．それどころか物理測度が存在しない，すなわち（連続関数の時間平均について）大数の法則が成り立たない例が知られている [4]．主結果から次のことがわかる．

系．高々有限回くりこみ可能な S-単峰写像 $f: X \to X$ に対して（適当なくりこみをとれば）大偏差原理が成り立つ．

参考文献

[1] Y. M. Chung, Large deviations on Markov towers. *Nonlinearity* **24** (2011), 1229–1252.

[2] Y. M. Chung and H. Takahasi, Large deviation principle for Benedicks-Carleson quadratic maps. *Comm. Math. Phys.* **315** (2012), 803–826.

[3] Y. M. Chung and H. Takahasi, Multifractal formalism for Benedicks-Carleson quadratic maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **34** (2014), 1116–1141.

[4] F. Hofbauer and G. Keller, Quadratic maps without asymptotic measure. *Comm. Math. Phys.* **127** (1990), 319–337.

[5] S. Johnson, Singular measures without restrictive intervals. *Comm. Math. Phys.* **110** (1987), 185–190.

[6] L. Jonker and D. Rand, Bifurcations in one dimension. I. The nonwandering set. *Invent. Math.* **62** (1981), 347–365.

[7] M. Lyubich, Almost every real quadratic map is either regular or stochastic. *Ann. of Math.* (2) **149** (1999), 319–420.

RISK-SENSITIVE ASSET MANAGEMENT WITH GENERAL FACTOR MODELS.

畑　宏明　(静岡大学教育学部)

【本講演の目的】リスク志向的設定下の一般的な非線形確率ファクターモデル用いた有限時間範囲のリスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題の最適戦略と最適値を求める。

まず、次の市場モデルを考える。

- 銀行預金過程：$dS_t^0 = r(Y_t)S_t^0 dt, \quad S_0^0 = s_0^0$
- $i(i=1,\cdots,m)$ 番目の危険資産価格過程：

$$dS_t^i = S_t^i \left\{ \mu^i(Y_t)dt + \sum_{k=1}^{n+m} \sigma_k^i(Y_t)dW_t^k \right\}, \quad S_0^i = s_0^i$$

- ファクター過程：

$$dY_t = g(Y_t)dt + \lambda(Y_t)dW_t, \quad Y(0) = y \in \mathbb{R}^n$$

ここで、 $W_t = (W_t^k)_{k=1,\cdots,(n+m)}$ は $n+m$ 次元標準ブラウン運動、 $\sigma, \lambda, \mu, g, r$ はそれぞれ $\mathbb{R}^{m\times(n+m)}, \mathbb{R}^{n\times(n+m)}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}$-値関数である。

このとき、次の条件を仮定する。

(A1) $\lambda, g, \sigma, \mu, r$ は大域的にリプシッツ連続, 滑らかな関数。

(A2) $x, \eta \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^m$ に対して,

$$\mu_1|\xi|^2 \le \xi^*\sigma\sigma^*(x)\xi \le \mu_2|\xi|^2,$$
$$\mu_1|\eta|^2 \le \eta^*\lambda\lambda^*(x)\eta \le \mu_2|\eta|^2,$$

となる $\mu_1, \mu_2 > 0$ が存在する。ただし、$(\cdot)^*$ はベクトル、行列の転置を表す。

(A3) r は非負定値かつ有界な関数。

π_t^i を i 番目の危険資産への投資比率 (投資戦略), $\mathbf{1} = (1,\cdots,1)^*$ とすると、投資家の資産価値過程 X_t^π は次を満たす。

$$\frac{dX_t^\pi}{X_t^\pi} = (1 - \pi_t^*\mathbf{1})\frac{dS_t^0}{S_t^0} + \sum_{i=1}^m \pi_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i}, \quad X_0^\pi = 1$$

本講演では、次の有限時間範囲のリスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題を扱う。

$$\text{(FRS)} \qquad \Gamma_T(\gamma) := \sup_{\pi\in\mathcal{A}_T} \frac{1}{\gamma}\log E\left[(X_T^\pi)^\gamma\right]$$

ここで、$\gamma \in (-\infty, 0)\cup(0,1)$ は投資家のリスク回避度を表すリスク鋭感的パラメーターで、$\mathcal{A}_T$ は許容な投資戦略全体。

$$\begin{cases} \text{本講演}\cdots\cdots\cdots\gamma \in (0,1) \text{ (リスク志向的)} \\ \text{Nagai(2003)}\cdots\gamma \in (-\infty,0) \text{ (リスク回避的)} \end{cases}$$

【解法の手順】

(1) 動的計画原理を用いて、形式的に (以下で与えられている)HJB 方程式 (0.1) を導出する。(※ HJB 方程式 (0.1) の $\sup\limits_{\pi\in\mathbb{R}^m}[\quad]$ において、sup を達成する $\hat{\pi}$ は最適投資戦略の候補になる。)

(2) HJB 方程式 (0.1) に最適戦略の候補 $\hat{\pi}$ を代入した方程式 (0.2)(以下で与えている) の解の存在を証明する。
(3) 方程式 (0.2) を用いて、Verification Theorem (最適戦略の候補 $\hat{\pi}$ が本当に最適戦略であることを保証する定理) を証明する。

実際、動的計画原理から、(FRS) に関連する HJB 方程式は次のようになる。

$$
(0.1)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\lambda(y)\lambda(y)^* D^2 v) + \frac{\gamma}{2}(Dv)^*\lambda(y)\lambda(y)^* Dv + g(y)^* Dv + r(y) \\
&+ \sup_{\pi\in\mathbb{R}^m}\left[-\frac{1-\gamma}{2}\pi^*\sigma(y)\sigma(y)^*\pi + \pi^*\{\mu(y) - r(y)\mathbf{1} + \gamma\sigma(y)\lambda(y)^* Dv\}\right] = 0, \\
&v(T,y) = 0
\end{aligned}
$$

つまり、次のようになる。

$$
(0.2)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\lambda(y)\lambda(y)^* D^2 v) + B(y)^* Dv + \frac{1}{2}(Dv)^* Q(y) Dv + U(y) = 0, \\
&v(T,y) = 0
\end{aligned}
$$

ただし、Q, B, U はそれぞれ次で与えられる。

$$
\begin{aligned}
Q(y) &:= \gamma\lambda(y)\left\{I + \frac{\gamma}{1-\gamma}\sigma(y)^*(\sigma(y)\sigma(y)^*)^{-1}\sigma(y)\right\}\lambda(y)^*, \\
B(y) &:= g(y) + \frac{\gamma}{1-\gamma}\lambda(y)\sigma(y)^*(\sigma(y)\sigma(y)^*)^{-1}(\mu(y) - r(y)\mathbf{1}), \\
U(y) &:= \frac{1}{2(1-\gamma)}(\mu(y) - r(y)\mathbf{1})^*(\sigma(y)\sigma(y)^*)^{-1}(\mu(y) - r(y)\mathbf{1}) + r(y)
\end{aligned}
$$

【解法の手順】を経て、次の結果が得られる。

Theorem 0.1. **(A1)** ∼ **(A3)** を仮定する。さらに、次も仮定する。

(A4) $|D\xi_0(y)| \le C_0(|y|+1), \exists C_0 > 0$ と

$$
\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\lambda(y)\lambda(y)^* D^2\xi_0) + B(y)^* D\xi_0 + \frac{1}{2}(D\xi_0)^* Q(y) D\xi_0 + U(y) \to -\infty, |y| \to \infty
$$

を満たす下に有界な関数 ξ_0 が存在する。

(A5) $(\mu(y) - r(y)\mathbf{1})^*(\sigma(y)\sigma(y)^*)^{-1}(\mu(y) - r(y)\mathbf{1}) + r(y) \to \infty, |y| \to \infty$

このとき、次の結果が得られる。

1. $\gamma \in \mathcal{D} := \{\gamma \in (0,1) : (\mathbf{A4}) \text{ is satisfied}\}$ に対して、(0.2) の解 $\hat{v}$ が存在して、次を満たす。

$$
\hat{v},\ \frac{\partial\hat{v}}{\partial t},\ D_i\hat{v},\ D_{ij}\hat{v} \in L^p(0,T; L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)), \quad 1 < \forall p < \infty.
$$

2. $\gamma \in \mathcal{D}$ に対して、

$$
\hat{\pi}(t, Y_t) := \frac{1}{1-\gamma}(\sigma(Y_t)\sigma(Y_t)^*)^{-1}\{\mu(Y_t) - r(Y_t)\mathbf{1} + \gamma\sigma(Y_t)\lambda(Y_t)^* D\hat{v}(t, Y_t)\}
$$

は (FRS) の最適戦略で、$\Gamma_T(\gamma) = \hat{v}(0,y)$ が成り立つ。

参考文献

[1] H. Hata (2015) “Risk-sensitive asset management with general factor models”, preprint.
[2] H. Nagai (2003) “Optimal strategies for risk-sensitive portfolio optimization problems for general factor models”, *SIAM J. Cont. Optim.* **41**, 1779–1800, MR1972534.

Local risk-minimization for Barndorff-Nielsen and Shephard models

新井拓児 (慶應義塾大学経済学部)*

本講演の目的は，数理ファイナンスにおける stochastic volatility モデルの一つである Barndorff-Nielsen and Shephard (BNS) モデルを考え，最適ヘッジ戦略の一つである locally risk-minimizing (LRM) 戦略の具体的表現を導出することである．また，時間が許せば数値計算結果も紹介する．

まず BNS モデルを紹介する．一つの安全資産と一つの危険資産から成る満期 $T > 0$ の市場モデルを考える．簡単のため，安全資産の価格は常に 1 であるとする．危険資産価格は以下の確率過程 S_t で与えられるものとする:

$$S_t = S_0 \exp\left\{ \int_0^t \left(\mu + \beta\sigma_s^2 \right) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \right\}.$$

ここで，$S_0 > 0$, $\mu, \beta \in \mathbb{R}$, $\rho \leq 0$，W は 1 次元ブラウン運動とする．また，

$$d\sigma_t^2 = -\lambda\sigma_t^2 dt + dH_{\lambda t}, \quad \sigma_0^2 > 0,$$

の解によって volatility σ が与えられるものとする．但し，$\lambda > 0$, H はドリフトを持たない subordinator(非減少 Lévy 過程) とする．

次に LRM 戦略について概観しよう．ヘッジの対象となるオプションを 2 乗可積分確率変数 X で与える．市場が完備であれば，$c \in \mathbb{R}$ と可予測過程 ξ が存在し，

$$X = c + \int_0^T \xi_t dS_t$$

を満たす．c は初期費用であり F の価格を与える．また，ξ は F を複製する self-financing(途中で資金の出し入れを行わない) な戦略である．非完備市場では複製戦略が存在しないので，何らかの意味で最適な戦略を探すことになるが，ここでは self-financing ではない完全複製戦略の中で，追加資金の L^2-ノルムが最小になる戦略を考える．より具体的には，時刻 t における投資家の安全資産の保有量を η_t, 危険資産の保有量を ξ_t とすると，投資家の富は $V_t = \eta_t + \xi_t S_t$ となる．時刻 t までの累積追加資金を C_t と書くと，$C_t = V_t - \int_0^t \xi_s dS_s$ が成立する．何故ならば，右辺第 2 項は危険資産への投資によって得られた利得を表しているからである．但し，$C_0 = V_0$ は初期費用である．C_t を用いて F を完全複製するので，

*本講演の一部は，今井悠人氏 (早稲田大学理工学術院)，鈴木良一氏 (慶應義塾大学理工学研究科) との共同研究である．

$F = V_T = C_T + \int_0^T \xi_s dS_s$ が成り立つように C_t を取る．C_t の取り方は η と ξ のペア $\varphi = (\eta, \xi)$ に依存するので $C_t(\varphi)$ と記述し，リスク過程 $R_t(\varphi)$ を

$$R_t(\varphi) := E\left[(C_T(\varphi) - C_t(\varphi))^2 \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

と定義する．このとき，あらゆる戦略の中でそのリスク過程が最小になるもの，つまり，任意の複製戦略 $\widetilde{\varphi}$ に対して，$R_t(\varphi) \leq R_t(\widetilde{\varphi})$ a.s. for every $t \in [0, T]$, を満たす戦略を risk-minimization と呼ぶ．LRM 戦略はこのような考えをベースに定義されたものだが，数学的にきちんとした定義は複雑なのでここでは述べない．

本講演では，ヘッジの対象となるオプションとして行使価格 $K > 0$ のヨーロピアンコールオプション $X = (S_T - K)^+$ を考え，以下の 2 通りの BNS モデルに対する LRM 戦略の具体的表現を紹介する．

1. $\beta = -\frac{1}{2}$ に制限した場合 ([3])
2. $\rho = 0$ に制限した場合 ([1])

詳細は省くが，Föllmer-Schweizer 分解と呼ばれる 2 乗可積分確率変数の直交分解を求めることが重要であり，そのために Lévy 過程に対する Malliavin 解析を用いる．先行研究である [4] では，多数の複雑な仮定の下，Clark-Ocone 型公式 ([5]) を用いて，Malliavin 微分による LRM 戦略の表現を導出している．1 では，この複雑な条件が満たされているかをチェックすることが主要な課題となる．その際，minimal martingale measure(MMM) と呼ばれる equivalent martingale measure の density が Malliavin 微分可能であることを示す．一方，2 の場合は，S_t が連続になることを利用して，MMM に測度変換した下で Malliavin 解析を定義するというアイデアを用いる．最後に時間があれば，数値計算結果を紹介したい．ここでは [2] で用いた高速フーリエ変換をベースにした方法を用いる．

References

[1] Arai, T. (2015) Local risk-minimization for Barndorff-Nielsen and Shephard models with volatility risk premium.
Available at http://arxiv.org/abs/1506.01477

[2] Arai, T., Imai, Y. and Suzuki, R. (2015) Numerical analysis on local risk-minimization for exponential Lévy models, to appear in International Journal of Theoretical and Applied Finance.

[3] Arai, T., Imai, Y. and Suzuki, R. (2015) Local risk minimization for Barndorff-Nielsen and Shephard models.
Available at http://arxiv.org/pdf/1503.08589v1

[4] Arai, T and Suzuki, R. (2015) Local risk-minimization for Lévy markets, International Journal of Financial Engineering, Vol. 2, 1550015.

[5] Suzuki, R. (2013) A Clark-Ocone type formula under change of measure for Lévy processes with L^2-Lévy measure, Commun. Stoch. Anal., Vol.7, 383–407.

On the Euler-Maruyama approximation for one-dimensional SDEs with irregular coefficients

Dai Taguchi (Ritsumeikan University)
joint work with
Hoang-Long Ngo (Hanoi National University of Education)

In this talk, we consider the Euler-Maruyama approximation for one-dimensional stochastic differential equations. We provide the strong rate of convergence when the drift coefficient is the sum of a bounded variation function on compact sets and a Hölder continuous function, and the diffusion coefficient is a Hölder continuous function.

Let $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ be a one-dimensional stochastic differential equation (SDE)

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s,\ x_0 \in \mathbb{R},\ t \in [0, T], \tag{1}$$

where $W := (W_t)_{0 \leq t \leq T}$ is a standard one-dimensional Brownian motion on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Veretennikov [6] show that if the drift coefficient b is bounded measurable and the diffusion coefficient σ is bounded, uniformly elliptic and $1/2 + \alpha$-Hölder continuous for some $\alpha \in [0, 1/2]$, then the equation (1) has a unique strong solution.

One often approximates X by using the Euler-Maruyama scheme which is defined by

$$X_t^{(n)} = x_0 + \int_0^t b\left(X_{\eta_n(s)}^{(n)}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(X_{\eta_n(s)}^{(n)}\right) dW_s,\ t \in [0, T],$$

where $\eta_n(s) = kT/n$ if $s \in [kT/n, (k+1)T/n)$. It is well-known that if the coefficients b and σ are Lipschitz continuous functions, then the Euler-Maruyama scheme has strong rate of convergence $1/2$, that is for any $p > 0$, there exists $C > 0$ such that

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - X_t^{(n)}|^p] \leq \frac{C}{n^{p/2}}.$$

Recently, Yan [7] and Gyöngy and Rásonyi [1] have shown that the strong rate in one-dimensional setting with Hölder continuous diffusion coefficient. Ngo and Taguchi [4] extended the results in [1, 7] for multi-dimensional SDEs with discontinuous drift coefficient (but it is one-sided Lipschitz function).

Halidias and Kloeden [2] prove that if b is increasing, continuous from bellow and σ is a Lipschitz continuous, then $X^{(n)}$ converges to X in L^2-norm. Their proof is based on upper and lower solutions of the SDE and its Euler-Maruyama approximation, so it is difficult to get any rate of convergence by using their approach. Leobacher and Szölgyenyi [3] introduce a clever way to transfer equation (1) with piecewise Lipschitz drift coefficient with finite number of discontinuous points, and Lipschitz continuous diffusion coefficient. Using their transformation technique, the equation (1) is equivalent to SDE with Lipschitz continuous coefficients. Therefore, the new equation can be approximated by its Euler-Maruyama scheme with the standard strong rate of convergence 1/2.

In this talk, we provide the rates of strong convergence of the Euler-Maruyama approximation for SDE (1) when the coefficients b and σ may have a very low regularity which includes every cases of [1, 2, 3, 4, 7]. More preciously, we suppose that the drift coefficient $b = b_A + b_H \in L^1(\mathbb{R})$ is bounded measurable, b_A is a function of bounded variation on compact sets and b_H is a Hölder continuous with $\beta \in (0, 1]$, and the diffusion coefficient σ is bounded, uniformly elliptic and $1/2+\alpha$-Hölder continuous with $\alpha \in [0, 1/2]$. Under these assumptions for the coefficients b and σ, we obtain that the L^1-convergence rate for the Euler-Maruyama scheme is $\frac{\beta}{2} \wedge \alpha$ if $\alpha \in (0, 1/2]$ and $\log n$ if $\alpha = 0$ (Theorem 2.3 of [5]). For the case $b \notin L^1(\mathbb{R})$, we also get the L^1-convergence rate, by using localization arguments, (Theorem 2.4 of [5]). Moerover, we obtain the L^p-sup convergence rate for any $p \geq 1$ (Theorem 2.6, 2.7, 2.8 of [5]).

The idea of proof is to use the Yamada-Watanabe approximation technique, the removal drift method and the Gaussian upper bounded for the density of the Euler-Maruyama approximation.

References

[1] Gyöngy, I. and Rásonyi, M.: A note on Euler approximations for SDEs with Hölder continuous diffusion coefficients. Stochastic. Process. Appl. 121, 2189–2200 (2011).

[2] Halidias, N. and Kloeden, P.E.: A note on the Euler-Maruyama scheme for stochastic differential equations with a discontinuous monotone drift coefficient. BIT 48(1) 51–59 (2008).

[3] Leobacher, G. and Szölgyenyi M.: A numerical method for SDEs with discontinuous drift. BIT Numer. Math. (2015).

[4] Ngo, H-L., and Taguchi, D.: Strong rate of convergence for the Euler-Maruyama approximation of stochastic differential equations with irregular coefficients. To appear in Mathematics of Computation.

[5] Ngo, H-L., and Taguchi, D.: On the Euler-Maruyama approximation for one-dimensional stochastic differential equations with irregular coefficients. Preprint, arXiv:1509.06532 (2015).

[6] Veretennikov, A.Yu.: On strong solution and explicit formulas for solutions of stochastic integral equations. Math. USSR Sb. 39, 387– 403 (1981).

[7] Yan, B. L.: The Euler scheme with irregular coefficients. Ann. Probab. 30, no. 3, 1172–1194 (2002).

Martingale problems for diffusions on metric graphs

TOMOYUKI ICHIBA [1]

We shall extend martingale problems for the Walsh Brownian motion ([1], [3], [4]) on a star graph to those for diffusions on a metric graph $(\mathfrak{G}, \mathfrak{d})$ with a finite number of vertices (cf. [2]).

Here the metric graph $(\mathfrak{G}, \mathfrak{d})$ is a collection of finite or semi-infinite edges $\{e \in \mathfrak{E}\}$ with N vertices $\mathfrak{V} := \{v_k\,,\ k = 1, \ldots, N\}$ for some $N < +\infty$ and metric $\mathfrak{d}$. We assume that the graph is imbedded in the Euclidian space $\mathbb{R}^2$ and that any two edges can only meet at a vertex. The metric $\mathfrak{d}$ is defined in the canonical way as the length of a shortest path between two points in $\mathfrak{G}$ along the edges and the length along each edge is measured with the usual Euclidian metric.

The semi-infinite edges isomorphic to $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ are called external, while the finite edges isomorphic to a finite open interval are called internal. We assign the initial vertex and the terminal vertex for each edge $e \in \mathfrak{E}$ via a map δ. The map δ associates each internal edge e to a pair $(\delta_1(e), \delta_2(e)) \in \mathfrak{V} \times \mathfrak{V}$ with its initial vertex $\delta_1(e)$ and its terminal vertex $\delta_2(e)$. An external edge e has only the initial vertex $\delta_1(e) \in \mathfrak{V}$ and we define $\delta_2(e) = +\infty$ formally. We call $\delta_i(e)$, $i = 1, 2$ the end points of $e \in \mathfrak{E}$. We write $v \sim e$, if $v \in \mathfrak{V}$ is one of the end points of $e \in \mathfrak{E}$, and define the set $\mathfrak{E}(v) := \{e \in \mathfrak{E} : v \sim e\}$ for each $v \in \mathfrak{V}$. We also assume that for each point $x \in \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{V}$ there exist unique $e \in \mathfrak{E}$, $v \in \mathfrak{V}$ and $r \in \mathbb{R}_+$, such that x belongs to the edge $e(x)$ with the initial vertex $v(x)$, the terminal vertex $\delta_2(e(x))$, and the length between x and the initial vertex is $r(x)$ defined by

$$v(x) := \delta_1(e(x))\,, \quad r(x) := \mathfrak{d}(v(x), x)\,; \quad x \in \mathfrak{G}\,. \tag{1}$$

Thus we identify the point $x \in \mathfrak{G}$ in terms of such triplet $(e, v, r) \in \mathfrak{E} \times \mathfrak{V} \times \mathbb{R}_+$, and define each function $g : \mathfrak{G} \to \mathbb{R}$ with this coordinate, i.e., $g(x) \equiv g(e, v, r)$, $x \in \mathfrak{G}$.

We consider the class $\mathfrak{D}$ of BOREL-measurable functions $g : \mathfrak{G} \to \mathbb{R}$ with the following properties: (i) they are continuous in the topology induced by the metric $\mathfrak{d}$; (ii) for every e, v, the function $r \mapsto g_{e,v}(r) := g(e, v, r)$ is twice continuously differentiable on $(0, \infty)$ and has finite first and second right-derivatives at the origin; (iii) the resulting functions $(e, v, r) \mapsto g'_{e,v}(r)$ and $(e, v, r) \mapsto g''_{e,v}(r)$ are BOREL measurable; and (iv) $\sup_{0<r<K, e\in\mathfrak{E}(v), v\in\mathfrak{V}} |g'_{e,v}(r)| + |g''_{e,v}(r)| < +\infty$ holds for all finite K. For notational simplicity we write

$$G'(x) := g'_{e,v}(r)\,, \quad G''(x) := g''_{e,v}(r) \quad \text{for } x = (e, v, r) \quad \text{with } r > 0 \tag{2}$$

and for each vertex $v \in \mathfrak{V}$ with $e \in \mathfrak{E}(v)$ we define

$$G'(e, v, 0+) := \lim_{x \to v, x \in \mathfrak{E}(v)} (-1)^{i+1} G'(x)\,, \quad \text{if } v = \delta_i(e)\,,\ i = 1, 2\,. \tag{3}$$

Let us consider the canonical space $\Omega := C([0, \infty); \mathbb{R}^2)$ of $\mathbb{R}^2$-valued continuous functions on $[0, \infty)$ endowed with the σ-algebra $\mathcal{F}$ of its BOREL sets. We consider also its coordinate mapping $\omega(\cdot)$ and the natural filtration $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}(t), 0 \le t < \infty\}$ with $\mathcal{F}(t) := \sigma(\omega(s), 0 \le s \le t)$, $0 \le t < \infty$. For each vertex $v \in \mathfrak{V}$ we shall consider a probability measure $\boldsymbol{\nu}_v(\mathrm{d}e)$, $e \in \mathfrak{E}(v)$ on the set $\mathfrak{E}(v)$ of edges. For example, if the total number of edges at v is finite, the measure $\boldsymbol{\nu}_v(\cdot)$ is a discrete probability measure (cf. [2]). In the following we shall construct the diffusion on $\mathfrak{G}$ with drifts $\boldsymbol{b} := \{\boldsymbol{b}(x), x \in \mathfrak{G}\}$, dispersions $\boldsymbol{\sigma} := \{\boldsymbol{\sigma}(x), x \in \mathfrak{G}\}$ and the vertex measures $\boldsymbol{\nu} := \{\boldsymbol{\nu}_v(\cdot), v \in \mathfrak{V}\}$ via the martingale problem associated with $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nu})$.

[1] Department of Statistics and Applied Probability, South Hall, University of California, Santa Barbara, CA 93106

Given the vertex measures $\boldsymbol{\nu}$ and BOREL measurable functions $\boldsymbol{b} : \mathfrak{G} \to \mathbb{R}_+$, $\boldsymbol{\sigma} : \mathfrak{G} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ we define for every $g \in \mathfrak{D}$ the process

$$M^g(\cdot;\omega) := g(\omega(\cdot)) - g(\omega_2(0)) - \int_0^{\cdot} \mathcal{L}g(\omega(t)) \cdot \mathbf{1}_{\{\omega(t)\in\mathfrak{E}\}} \mathrm{d}t\,, \tag{4}$$

where with $\boldsymbol{a}(\cdot) := \boldsymbol{\sigma}^2(\cdot)$ and the derivatives in (2) we define the infinitesimal generator

$$\mathcal{L}g(x) := \boldsymbol{b}(x)G'(x) + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}(x)G''(x)\,; \quad x \in \mathfrak{G}\,.$$

Local Martingale Problem: For every fixed $\mathrm{x} \in \mathfrak{G}$ to find a probability measure $\mathbb{P}$ on the canonical space $(\Omega, \mathcal{F})$, such that $\omega(0) = \mathrm{x}$ holds $\mathbb{P}$-a.e.; (ii) $\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{\omega(t)\in\mathfrak{V}\}}\mathrm{d}t \equiv 0$ holds $\mathbb{P}$-a.e.; (iii) for every function $g \in \mathfrak{D}_+$ (respectively, $\mathfrak{D}_0$), the process $M^g(\cdot)$ in (4) is a continuous local submartingale (resp., martingale) with respect to the filtration $\mathbb{F}^\bullet := \{\mathcal{F}(t+), 0 \le t < \infty\}$, where

$$\mathfrak{D}_+(\text{resp., } \mathfrak{D}_0) := \left\{ g \in \mathfrak{D} : \int_{\mathfrak{E}(v)} G'(e,v,0+)\boldsymbol{\nu}_v(\mathrm{d}e) \ge 0 \ (\text{resp., } \equiv 0)\,,\ v \in \mathfrak{V} \right\}.$$

Proposition. Suppose that the drifts are identically zero and the reciprocal of the dispersion coefficient $r \mapsto \boldsymbol{\sigma}_{e,v}(r) := \boldsymbol{\sigma}(e,v,r) = \boldsymbol{\sigma}(x)$ is locally square integrable, i.e., $\int_K (1\,/\,\boldsymbol{\sigma}^2_{e,v}(r))\mathrm{d}r < +\infty$ for every compact subset K of $\overline{e} := e \cup \{\delta_1(e)\} \cup \{\delta_2(e)\}$, $e \in \mathfrak{E}(v)$, $v \in \mathfrak{V}$. Then the local martingale problem associated with the triplet $(0, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nu})$ is well-posed.

More generally, under appropriate conditions, by the method of time-change and the scale functions we may construct the diffusion on the graph $\mathfrak{G}$ associated with the triplet $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nu})$.

For a fixed initial vertex $v_* \in \mathfrak{V}$ and its neighborhood B (as a subset of $\mathfrak{E}(v_*)$), the local behavior of the resulting coordinate process $X(\cdot,\omega) := \omega(\cdot)$ in B is characterized by the distance $R(\cdot) := r(X(\cdot))$ (defined as in (1)) from the vertex v_* which satisfies

$$\mathrm{d}R(t) = \boldsymbol{b}(X(t))\mathrm{d}t + \boldsymbol{\sigma}(X(t))\mathrm{d}\beta(t) + \mathrm{d}L^R(t)\,; \quad t \ge 0 \tag{5}$$

locally for some Brownian motion $\beta(\cdot)$ and the local time growths

$$\mathrm{d}L^{R^A}(t) = \boldsymbol{\nu}_{v_*}(A) \cdot \mathrm{d}L^R(t)\,; \quad t \ge 0\,, \tag{6}$$

where $L^\xi(\cdot)$ is the semimartingale local time at the origin for the generic semimartingale $\xi(\cdot)$ and $R^A(\cdot) := R(\cdot)\mathbf{1}_{\{e(X(\cdot))\in A\}}$ for every BOREL subset A of $\mathfrak{E}(v_*)$.

This is an extension of the results in [2] from the graph with a finite number of edges to that with possibly uncountable number of edges but still with a finite number N of vertices. We shall also discuss some examples (including the WALSH diffusions with $N = 1$) and further extensions.

References

[1] BARLOW, M., PITMAN, J. & YOR, M. (1989) On Walsh's Brownian motions. *Séminaire de Probabilités XXIII*. Lecture Notes in Mathematics **1372**, 275-293.

[2] FREIDLIN, M. & SHEU, S. (2000) Diffusion processes on graphs: stochastic differential equations, large deviation principle. *Probab. Theory and Relat. Fields* **116** 181-220.

[3] ICHIBA, T., KARATZAS, I., PROKAJ, V. & YAN, M. (2015) Stochastic integral equations for Walsh semimartingales. Preprint available at arXiv: 1515.02504.

[4] WALSH, J. (1978) A diffusion with a discontinuous local time. *Astérisque* **52-53**, 37-45.

保険会社の存続問題 2

西岡 國雄 (中央大学商学部),　中島 禎志 (東京電機大学理工学部),
佐藤 定夫 (東京電機大学理工学部)

1 保険会社の存続問題とは

正の定速ドリフトから, 正の飛躍を持つ複合 Poisson 過程を減じた加法過程 $\{X(t)\}$ (以降 Surplus 過程と呼ぶ) を考える:

(1.1)
$$X(t) = x + \kappa_0\, t - \int_0^t dN(s)\, Z_{N(s)}, \quad x \geq 0.$$

ここで, $\kappa_0 > 0$ は定数, $\{N(t), t \geq 0\}$ は平均 γ_0 の Poisson 過程, $\{Z_k, k = 1, 2, \cdots\}$ は共通分布が F の *i.i.d.* r.v.'s で $\{N(t)\}$ とは独立とする.

$\{X(t)\}$ が, 負領域へ到達する最小時刻を T_0 とする. 保険会社の存続問題を扱う Lundberg model では, これが保険会社が倒産する時刻となる. "保険会社の存続問題" とは, "倒産時刻 T_0 および倒産額 $X(T_0)$ " と κ_0, x, γ_0 との関数関係を明らかにすることである.

従来は F が, 指数分布およびその類似物以外では 倒産時刻と破産額の同時分布の Laplace–Fourier 変換 $v(x,\alpha,\beta) \equiv \mathbf{E}_x[\exp\{-\alpha\, T_0 + i\,\beta\, X_{T_0}\}]$, $(\alpha > 0,\ \beta \in \mathbf{R}^1)$ の具体型は知られていない (今後 v を "同時分布" と呼ぶ). 本講演では "δ 分布の線形結合" (*cf.*, 定義 2.3, この空間を $\mathcal{D}$ と表記する) であるとき, 倒産時刻と破産額の同時分布の具体型を与える. 更に, $\mathcal{D}$ は確率分布空間で dense であることから, これにより, "一般の F に対する同時分布の具体型" に対する精密な近似定理が得られる.

2 主結果

Surplus 過程 (1.1) に Ito の公式を用いて, 次が得られる.

命題 2.1 (積分微分方程式)**.** $\alpha > 0,\ \beta \in \mathbf{R}^1$ とするとき, $v(x,\alpha,\beta) = \mathbf{E}_x[\exp\{-\alpha\, T_0 + i\,\beta\, X(T_0)\}]$ は次の積分微分方程式の解: $\widehat{F}(\lambda) \equiv \displaystyle\int_0^\infty dF(y)\ e^{-\lambda\, y}$　とおき

$$\begin{cases} \alpha\, v(x,\alpha,\beta) = \kappa_0\ \partial_x v(x,\alpha,\beta) + \gamma_0 \Big[\displaystyle\int_0^x dF(y)\ \big\{ v(x-y,\alpha,\beta) - e^{i\,\beta\,(x-y)} \big\} + \\ \qquad\qquad + e^{i\,\beta\, x}\ \widehat{F}(i\,\beta) - v(x,\alpha,\beta) \Big], \quad x \geq 0, \\ v(x,\alpha,\beta) = e^{i\,\beta\, x}, \quad x < 0. \quad \diamond \end{cases}$$

この積分微分方程式を解くために, x に関して Laplace 変換を行う. $\rho_0 \equiv \gamma_0/\kappa_0$ とおくと,

(2.1)
$$\widehat{v}(\lambda,\alpha,\beta) = \frac{v(0,\alpha,\beta) - \rho_0 \big\{ \widehat{F}(i\,\beta) - \widehat{F}(\lambda) \big\} / (\lambda - i\,\beta)}{\lambda - \rho_0 \big\{ 1 - \widehat{F}(\lambda) \big\} - \alpha/\kappa_0}.$$

ただし, (2.1) の右辺, $v(0,\alpha,\beta)$ はまだ未知関数である.

$\{X(t)\}$ の random walk 近似を行い, Feller の補題 ([2], Ch 18, Lemma 1) を適用すると, この $v(0,\alpha,\beta)$ の具体型が得られる:

命題 2.2. 共通分布 F の Fourier 変換を $\widetilde{F}(\xi)=\mathbf{E}[e^{i\,\xi\,Z_1}]$ とおくと,

$$\log\frac{1}{1-v(0,\alpha,\beta)}=\frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int_\alpha^\infty ds\int_{-\infty}^{0-}dx\;e^{i\beta x}\int_{-R}^{R}d\xi\;\frac{e^{-i\xi\,x}}{s-h(\xi)}. \tag{2.2}$$

ここで $h(\xi)\equiv i\xi\,\kappa_0-\gamma_0+\gamma_0\,\widetilde{F}(-\xi)$. $\diamond$

定義 2.3. F が "δ 分布の線形結合" とは, ある整数 $M>0$, 定数 $0<a_1<a_2<\ldots<a_M$, および, 定数 $0\le p_k<1,\ k=1,2,\ldots,M\ (p_1+\cdots+p_M=1)$ に対し,

$$dF(x)=\sum_{k=1}^{M}p_k\,\delta(x,a_k)\,dx. \tag{2.3}$$

となることである. 但し $\delta(x,a)$ は "位置 a に単位質量がある δ 関数" を表す. $\diamond$

(2.1) と (2.2) から, 我々の主定理が導かれる. 多重指数の記法を用いて,

定理 2.4 (主定理)**.** 共通分布 F は δ 分布の線形結合 (2.3) とし, $\rho_0\equiv\dfrac{\gamma_0}{\kappa_0},\ \zeta\equiv\rho_0+\dfrac{\alpha}{\kappa_0}$ とする.

$$v(0,\alpha,\beta)=1-\exp\Big\{-\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^M}\frac{\mathbf{p}^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}\,!}\,\rho_0^{|\mathbf{k}|}\,e^{-i\,\beta\,\langle\mathbf{k},\mathbf{a}\rangle}\int_0^{\langle\mathbf{k},\mathbf{a}\rangle}dy\;e^{(i\,\beta-\zeta)\,y}\;y^{|\mathbf{k}|-1}\Big\},$$

$$\begin{aligned}
v(x,\alpha,\beta)&=\mathbf{E}_x\big[\exp\{-\alpha\,T_0+i\,\beta\,X(T_0)\,\}\big]\\
&=v(0,\alpha,\beta)\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^M}\frac{\mathbf{p}^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}\,!}\,(-\rho_0)^{|\mathbf{k}|}\,\big(x-\langle\mathbf{k},\mathbf{a}\rangle\big)^{|\mathbf{k}|}\,e^{\zeta\,(x-\langle\mathbf{k},\mathbf{a}\rangle)}\,I_{\{x>\langle\mathbf{k},\mathbf{a}\rangle\}}-\\
&\quad+\sum_{\ell=1}^{M}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^M}\frac{\mathbf{p}^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}\,!}\,(-\rho_0)^{|\mathbf{k}|+1}\,p_\ell\,\times\\
&\quad\times\int_0^\infty dy\;e^{\zeta\,(y-\langle\mathbf{k},\mathbf{a}\rangle)+i\,\beta\,(x-y-a_\ell)}\,\big(y-\langle\mathbf{k},\mathbf{a}\rangle\big)^{|\mathbf{k}|}\;I_{\{y>\langle\mathbf{k},\mathbf{a}\rangle\}}\;I_{\{0<x-y<a_\ell\}}.
\end{aligned}$$

ここで, $v(x,\alpha,\beta)$ の右辺に現れる $\displaystyle\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^M}\big(\quad\big)$ は有限和であることを注意する. $\diamond$

文献

[1] Cramér, H., Historical review of Fillip Lundberg's work on risk theory, Skand. Aktua. (Suppl.), 52 (1969), 6-12.

[2] Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Aplications, Vol. II, John Wiley & Sons, 1971.

[3] Lundberg, F., Über die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Risikenmasse. Skand. Aktua., 13 (1930), 1-83.

[4] Nishioka, K. and Igarashi, T., Non-ruin probability of an insurer under the Lundberg model, 京都大学, 数理研考究録, 1903 (2014), 140–147.

二つ時間軸を持つ拡散過程の数理人口学への応用

[1] 大泉嶺*, [2] 國谷紀良, [3] 江夏洋一

Ryo Oizumi*, Toshikazu Kuniya, Yoichi Enatsu

[1] 厚生労働省　社会保障・担当参事官室,

[2] 神戸大学システム情報学研究科,[3] 東京理科大学数理情報科学科.

oizumi@ms.u-tokyo.ac.jp

1　概要

数理人口学とは人間に限らず様々な生物個体の持つ性質（年齢、サイズや空間的位置など）からその生物集団全体の動態（人口の増減）を議論の数理生物学分野の一つである．ミクロな粒子の相互作用からマクロな現象（熱力学など）の説明を試みる統計力学の生物学版と考える事も出来る．統計力学との大きな違いは、まず粒子に当たる生物個体の動態は物理的な時刻以外に年齢というもう一つの時刻をもつところにある．物理的な時刻は生物集団全体のマクロ的構造変化に関わる一方、年齢は生物個体の 1 個体の生涯に関わる重要なパラメータである．また、これらの解析にあたり数理生物学者の最大の関心事はどのような生物個体の性質がその集団の中で支配的になるか、という所謂進化を考える事である．また、人口政策からも、施策による生活史の変化と人口動態への影響を調べる事は将来の政治的意思決定に重要な役割を果たすのは明らかである．そこで個体の性質が取り得る空間を $A \subseteq \mathbb{R}^d$ とし、年齢 $a \in (0, \alpha)$ での状態を $X_a \in A$ とする．初期状態を $X_0 = x \in A$ と固定し、一個体の発展方程式は Ito 型確率微分方程式を用いて

$$\begin{cases} dX_a^j(t) = g_j(X_a(t), v_a, \Gamma_{t,x})\, da + \sum_{k=1}^N \sigma_{jk}(X_a(t), v_a, \Gamma_{t,x})\, dB_a^k, \quad 1 \le j \le d \\ X_0^j = x^j \end{cases} \tag{1}$$

と書き表せるとする．このとき、

$$dX_a^j(t) := X_{a+\varepsilon}^j(t+\varepsilon) - X_a^j(t)$$

個体が持つ発展過程の制御（繁殖のタイミングや餌を選択する割合）を

$$v = v_a := (v_1(a), v_2(a), \cdots, v_l(a))$$

とし [1]、時刻 t での集団の密度による統計的効果を $\Gamma_{t,x} := \left(\Gamma_{t,x}^{1}, \Gamma_{t,x}^{2}, \cdots, \Gamma_{t,x}^{m}, \cdots, \Gamma_{t,x}^{M}\right)$ とする．つまり、時刻は各同世代（コホートという）の統計法則を与える役割を果たし、その後、年齢と時刻は同じスケールで変化する（これは例えば、社会的出来事を何歳で経験するかという事などを意味する）．

時刻 t において年齢 a で状態 $y \in A$ にいる集団の密度を $P_t(a, x \to y)$ とすればその発展過程は以下で与えられる；

$$\begin{aligned} P_{t+\varepsilon}(a+\varepsilon, x \to y) &= \int_A d\xi \; K_{\varepsilon,t}(\xi \to y) P_t(a, x \to \xi) \\ P_t(0, x \to y) &= \underbrace{n_t(x)}_{\text{新規個体密度}} \times \delta^d(x-y) \\ n_t(x) &= \int_0^{\alpha}\int_A da dy \; \underbrace{F(y, \Gamma_{t,x})}_{\text{繁殖率}} P_t(0, x \to y) \end{aligned} . \tag{2}$$

t と a が異なっていても、ε を時刻変数と思えば、1 変数の時間のモデルとみなせる．この時刻を採用して Ito の補題などを用いると nonlocal な非線形偏微分方程式として集団の密度のダイナミクスを確率微分方程式 Eq.(1) と結びついた方程式をえられる．その方程式に関する詳細は本講演に回すが、本研究では上記の方程式における定常状態の進化動態および最適制御を以下の Hamilton–Jacobi–Bellman 方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a}\tilde{w}_{\lambda,a}(x,\Gamma) - \inf_{v\in\mathcal{V}}\left\{\left[\bar{\mathcal{H}}_x^v(\Gamma) + \lambda\right]\tilde{w}_{\lambda,a}(x,\Gamma)\right\} = 0 \\ \tilde{w}_{\lambda,\alpha}(x,\Gamma) = F(x,\Gamma) \\ \bar{\mathcal{H}}_x^v(\Gamma) := -\displaystyle\sum_{j=1}^{d} g_j(x,v,\Gamma)\frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{1}{2}\sum_{j,j'=1}^{d} c_{jj'}(x,v,\Gamma)\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^{j'}} + \mu(x,v,\Gamma) \\ \Gamma \in \mathbb{R}_+^M, \end{cases} \tag{3}$$

$$\tilde{\psi}_\lambda(x,\Gamma) = \int_0^{\alpha} da \; \tilde{w}_{\lambda,a}(x,\Gamma) = 1, \tag{4}$$

によって解析できる事を具体例を挙げることによって示す．

参考文献

[1] R. Oizumi, Unification theory of optimal life histories and linear demographic models in internal stochasticity, PLOS ONE 9 (6) (2014) e98746.

非勾配型の流体力学極限に現れる無限直積空間上の完全形式と閉形式

佐々田槙子*，亀谷幸生†

非勾配型の系に対する流体力学極限，および平衡揺動問題において，ミクロな系の確率過程を定める作用素に関する無限直積空間上の閉形式の特徴づけが本質的な役割を果たしている．(cf. [1, 2])

特に，スペクトルギャップの sharp な評価もこの閉形式の特徴づけを示すために用いられており，一般的には，この閉形式の特徴づけの証明が Varadhan による非勾配型の系に対するエントロピー法を用いる際の最も重要かつ難しい部分となる．

閉形式の特徴づけは，その名の通り，多様体における微分形式に類似した概念を無限直積空間上の関数空間に定義し，そのうちの閉形式に対応する関数（または形式）を，それぞれ多様体における完全形式と調和形式に対応するものに分解する定理である．すなわち，ある種のコホモロジー群の特徴づけの問題である．ここで，調和形式の空間の次元とその具体形が重要である．この次元や調和形式の具体形は，ミクロな系を定める確率過程の詳細な性質にはよらない普遍的なものであると考えられているが，これまでの証明ではこの普遍性がなぜ現れるのか明らかになっていなかった．

そこで，本研究では，非勾配型の流体力学極限に現れる閉形式の特徴づけの問題を動機とし，より一般に，無限直積空間上に定まるいくつかの関数空間における "微分 1 形式" を定義し，その閉形式の完全形式と調和形式への分解を具体的に与えた．

本研究により，調和形式の次元や具体形が普遍的である構造が明らかになった．また，これまで $\mathbb{Z}$ および $\mathbb{Z}^d$ による直積空間のみの結果が知られていたが，これを結晶格子による直積空間まで拡張することができた．これにより，結晶格子上の非勾配型排他過程に対する流体力学極限のアプローチが可能になると思われる．

本講演では，Bernoulli 直積測度を可逆測度として持つ排他過程に対応する作用素と，Ginzburg-Landau モデルに対応する作用素についての結果を中心に述べる．他の例については時間が許せば紹介したい．

参考文献

[1] C. Kipnis and C. Landim, *Scaling Limits of Interacting Particle Systems*, 1999, Springer.

[2] S.R.S. Varadhan, *Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions II*, in Asymptotic Problems in Probability Theory, Stochastic Models and Diffusions on Fractals, Pitman Res. Notes Math. Ser., **283** (1994), 75-128.

*東京大学大学院数理科学研究科, sasada@ms.u-tokyo.ac.jp
†慶應義塾大学理工学部数理科学科

On fluctuations of eigenvalues of Gaussian beta ensembles at high temperature

Trinh Khanh Duy
Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

1 Introduction

Gaussian beta ensembles, as generalizations of Gaussian orthogonal ensembles, Gaussian unitary ensembles and Gaussian symplectic ensembles, were initially defined as eigenvalues ensembles with the joint density,

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \propto |\Delta(\lambda)|^\beta e^{-\beta \sum_{i=1}^n V(\lambda_i)} d\lambda = \exp\left(\beta\Big(\sum_{i<j} \ln|\lambda_j - \lambda_i| - \sum_{i=1}^n V(\lambda_i)\Big)\right) d\lambda,$$

where $V(\lambda) = \lambda^2/4$ and $\Delta(\lambda) = \prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i)$ denotes the Vandermonde determinant. They can be also viewed as the equilibrium measure of a one dimensional Coulomb log-gas at the inverse temperature β.

Let

$$L_{n,\beta} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \delta_{\lambda_j/\sqrt{n}}$$

be the empirical distributions of the scaled Gaussian beta ensembles. Then for fixed β, it is well known that the empirical measures $L_{n,\beta}$ converge weakly to the semicircle distribution, where the semicircle distribution, denoted by sc, is a probability measure supported on $[-2, 2]$ with the density $\sqrt{4 - x^2}/(2\pi)$. This means that for any bounded continuous function f,

$$\langle L_{n,\beta}, f\rangle = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(\lambda_j/\sqrt{n}) \to \langle sc, f\rangle = \int_{-2}^2 f(x)\frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}dx \text{ a.s. as } n \to \infty.$$

The fluctuations around the semicircle distribution were also investigated. More precisely, it was shown in [7] that for a sufficiently nice function f with $\langle sc, f\rangle = 0$,

$$\sum_{j=1}^n f(\lambda_j/\sqrt{n}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_f^2) \text{ as } n \to \infty.$$

Here $\xrightarrow{d}$ denotes the convergence in distribution. Note that beta ensembles with general potential V were considered in [7].

Matrix models for Gaussian beta ensembles were introduced by Dumitriu and Edelman [4]. They are symmetric tridiagonal matrices, also called Jacobi matrices, whose components are independent and are distributed as

$$T_{n,\beta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}}\begin{pmatrix} \mathcal{N}(0,1) & \tilde\chi_{(n-1)\beta} & & \\ \tilde\chi_{(n-1)\beta} & \mathcal{N}(0,1) & \tilde\chi_{(n-2)\beta} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \tilde\chi_\beta & \mathcal{N}(0,1)\end{pmatrix}.$$

Here $\tilde{\chi}_k$, for $k > 0$, denotes the $(1/\sqrt{2})$-chi distribution with k degrees of freedom or the square root of the gamma distribution $\Gamma(k, 1)$. By those matrix models, Dumitriu and Edelman [5] established the above central limit theorem for polynomials f by different methods.

The limiting behaviour of Gaussian beta ensembles in the regime where $n \to \infty$ with $\beta = 2\alpha/n \to 0$ (α being a positive constant) has been considered recently. It was shown first in [1, 6] that the mean empirical distribution (also the mean spectral measure) converges weakly to a deterministic distribution μ_α, and then in [3] that the empirical distributions $L_{n,\beta}$ themselves converge weakly to the same limit. Namely, for any polynomial p, as $n \to \infty$ with $n\beta = 2\alpha$,

$$\langle L_{n,\beta}, p \rangle \to \langle \mu_\alpha, p \rangle \text{ in probability.}$$

The probability measure μ_α here is the (scaled) measure of associated Hermite polynomial [2]. Note that the support μ_α is the whole real line and the measure μ_α is determined by its moments.

It is the purpose of this talk to investigate the fluctuations of the empirical distributions around μ_α. The main result is as follows.

Theorem 1.1. *For a polynomial p of positive degree, as $n \to \infty$ with $n\beta = 2\alpha$,*

$$\frac{\langle L_n, p \rangle - \mathbb{E}[\langle L_n, p \rangle]}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \hat{\sigma}_p^2).$$

The main tool used here is the martingale difference central limit theorem. It is expected that the central limit theorem should hold for a larger class of 'nice' function f.

References

[1] R. Allez, J-P. Bouchaud, and A. Guionnet: *Invariant beta ensembles and the Gauss-Wigner crossover,* Physical review letters **109** (2012), no. 9, 094102.

[2] R. Askey and J. Wimp: *Associated Laguerre and Hermite polynomials*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **96** (1984), no. 1-2, 15–37.

[3] F. Benaych-Georges, S. Péché: *Poisson statistics for matrix ensembles at large temperature,* J. Stat. Phys. **161** (2015), no. 3, 633–656.

[4] I. Dumitriu and A. Edelman: *Matrix models for beta ensembles,* J. Math. Phys. **43** (2002), no. 11, 5830–5847.

[5] I. Dumitriu and A. Edelman: *Global spectrum fluctuations for the β-Hermite and β-Laguerre ensembles via matrix models,* J. Math. Phys. **47** (2006), 063302.

[6] T.K. Duy and T. Shirai: *The mean spectral measures of random Jacobi matrices related to Gaussian beta ensembles,* Electron. Commun. Probab. **20** (2015), no. 68, 1–13.

[7] K. Johansson: *On fluctuations of eigenvalues of random Hermitian matrices,* Duke Math. J. **91** (1998), no. 1, 151–204.

CONCENTRATION FOR FIRST PASSAGE PERCOLATION

中島秀太

1. 序

First passage percolation は、ランダム環境下での最速移動時間の性質を調べる分野である。本講演では、[1] で導入されている、非有界なジャンプを許すような方向付き First passage percolation での最速移動時間のスケーリング極限の性質を議論する。以下で正確な設定を述べる。

2. モデルの設定

まず独立同分布なベルヌーイ確率変数 $(\{\eta(j,x)\}_{(j,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d},\mathbb{P})$;

$$\mathbb{P}(\eta(j,x)=1)=p\in(0,1].$$

を用意する。これを用いてランダム環境 ω_p を測度として次で定義する。

$$\omega_p=\sum_{(k,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d}\eta(k,x)\delta_{(k,p^{1/d}x)}. \tag{2.1}$$

また、$(\mathbb{P},\omega_0)$ を intensity が counting measure と Lebesgue measure の積となるような $\mathbb{N}\times\mathbb{R}^d$ 上の Poisson point process とする。この時 (2.1) でのスケーリング $p^{1/d}$ により、ω_p が $p\downarrow 0$ で ω_0 に収束する事がわかる。与えられたランダム環境 ω_p に対して, 0 から n までの最速移動時間を

$$T_n(\omega_p)=\min\left\{\sum_{k=1}^{n}|x_{k-1}-x_k|^\alpha : x_0=0 \text{ and } \{(k,x_k)\}_{k=1}^n\subset\omega_p\right\} \tag{2.2}$$

で定義する。ここで subadditive ergodic theorem を用いる事により次の極限の存在がわかる。

$$\mu_p=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}T_n(\omega_p)\quad \mathbb{P}\text{-}a.s. \tag{2.3}$$

この極限 μ_p は time constant と呼ばれ、ランダムでない定数である。

3. 主結果

Theorem 1 (concentration around the mean)**.** *For any $\chi<1/2$, there exist $C_1,C_2,\lambda>0$ independent of p such that for any $n\in\mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P}(|n^{-1}T_n(\omega_p)-n^{-1}\mathbb{E}[T_n(\omega_p)]|>n^{-\chi})<C_1\exp\{-C_2n^{\lambda}\}.$$

Theorem 2 (rate of convergence)**.** *For any $\gamma\in(0,\frac{1}{2})$, there exists $C>0$ independent of p such that for any $n\in\mathbb{N}$,*

$$|\mu_p-n^{-1}\mathbb{E}[T_n(\omega_p)]| \quad < \quad Cn^{-\gamma}.$$

Theorem 3 (continuity)**.** *μ_p is continuous in $p\in[0,1]$.*

Theorem 1 の Concentration と呼ばれる性質は他の First Passage Percolation のモデルでも証明されている事実である。その証明の中心にあるのはランダム媒質の小さな変化では最速移動時間 T_n が大きく変化する事がないという事実である。$\alpha>1$ の時、その変化は最適なパスの jump 幅と大きく関連があるため、それらを制御する必要がある。一方、その制御はこのモデル特有の難しさがあり、本研究の最も重要な部分でもある。時間の許す限り、この制御の証明の概略にも触れたい。

References

[1] F. Comets, R. Fukushima, S. Nakajima, N. Yoshida. Limiting results for the free energy of directed polymers in random environment with unbounded jumps *Journal of Statistical Physics.*

ある非対称形式に付随する半群の短時間漸近挙動

大阪大学基礎工学研究科　松浦浩平

本講演では, [1, 2] で得られた対称 Dirichlet 形式に関する積分型 Varadhan 評価が, 1 階の摂動項を加えた非対称な形式に対して成り立つための十分条件を与える.

1　先行結果

定理 1 ([1, Theorem 2.7])**.** $(E,\mathcal{B},\mu)$ を σ-有限測度空間, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(E,\mu)$ 上の対称な強局所 Dirichlet 形式, $(T_t)_{t>0}$ を対応する $L^2(E,\mu)$ 上の対称 Markov 半群とする. 測度有限なる可測集合 A,B に対し, $P_t(A,B)=\displaystyle\int_A T_t 1_B\,d\mu$ と定めるとき次が成り立つ.

$$\lim_{t\to 0} 2t\log P_t(A,B) = -\mathsf{d}(A,B)^2.$$

ここで $\mathsf{d}(A,B)$ は A,B の内在的集合間距離と呼ばれる量で, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ から直接定義される量である.

2　主結果

定理 2 (主結果)**.** 確率空間 $(E,\mathcal{B},\mu)$ 上の強局所かつ再帰的な Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}^0,\mathcal{F})$ が, 可分実 Hilbert 空間 $(H,(\cdot,\cdot)_H)$ に値をとる勾配作用素 $\nabla:\mathcal{F}\to L^2(E\to H;\mu)$ を用いて $\mathcal{E}^0(f,g)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_E(\nabla f,\nabla g)_H\,d\mu$ と表されているとする. E 上の H-値可測関数 b,c について, 任意の $\epsilon>0$ に対し, ある $A_\epsilon>0$ が存在して

$$\max\left\{\int_E \|b\|_H^2 f^2\,d\mu, \int_E \|c\|_H^2 f^2\,d\mu\right\} \le \epsilon\mathcal{E}^0(f,f)+A_\epsilon\int_E f^2\,d\mu, \quad f\in\mathcal{F}$$

が成立すると仮定する. このとき, 非対称形式

$$\mathcal{E}(f,g)=\frac{1}{2}\int_E(\nabla f,\nabla g)_H\,d\mu+\int_E(b,\nabla f)_H g\,d\mu+\int_E(c,\nabla g)_H f\,d\mu, \quad f,g\in\mathcal{F}$$

に付随する正値保存的な半群 $(T_t)_{t>0}$ は, $(\mathcal{E}^0,\mathcal{F})$ から定義される内在的集合間距離 d を用いた積分型 Varadhan 評価を持つ. すなわち, 任意の $A,B\in\mathcal{B}$ に対し,

$$P_t(A,B)=\int_A T_t 1_B\,d\mu, \quad \mathsf{d}(A,B)=\sup_{f\in\mathcal{F}_0}\left(\operatorname*{essinf}_{x\in B} f(x)-\operatorname*{esssup}_{x\in A} f(x)\right)$$

と定めるとき

$$\lim_{t\to 0} 2t\log P_t(A,B) = -\mathsf{d}(A,B)^2$$

が成り立つ. ただし, ここで $\mathcal{F}_0=\left\{f\in\mathcal{F}_b : {}^\forall h\in\mathcal{F}_b, \displaystyle\int_E(\nabla f,\nabla f)h\,d\mu\le\int_E|h|\,d\mu\right\}$ であり, essinf, esssup は μ に関するものである.

参考文献

[1] Ariyoshi, T. and Hino, M., Small-time asymptotic estimate in local Dirichlet spaces, Electron. J. Probab. **10** (2005), 1236–1259.

[2] Hino, M. and Ramírez, J. A., Small-time Gaussian behavior of symmetric diffusion semigroups, Ann. Probab. **14** (2003), 1254–1295.

Parametrix method for simulation of stochastic differential equations

Tomooki Yuasa *

Abstract

In this talk, we introduce an exact simulation method for stochastic differential equations (SDE's) via Parametrix method with localization. This method can be expressed as two methods: the Forward method and the Backward method. In particular, the Backward method does not require the regularity of the coefficients of the SDE. Although the method has no bias, the error will be big because the variance is not generally finite. Accordingly, we consider an important sampling method together with and a new idea called the localization technique.

1 Preparation

Here, we simply explain the 1-dimensional SDE with the Forward method only. The general case can be obtained similarly. Let $X_t \equiv X_t(x)$ be the weak solution of 1-dimensional SDE

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt, & t \in [0,T], \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{1}$$

where W_t is a 1-dimensional Wiener process. Let $\xi_i, i \in \mathbf{Z}_{>0}$ be a sequence of i.i.d. random variables with common density f_ξ which satisfies $f_\xi|_{(-\infty,0)}(x) = 0 \ dx - a.e.$ and $f_\xi|_{[0,\infty)}(x) > 0 \ dx - a.e.$ Also, let $\tau_0 \equiv 0, \tau_i = \sum_{j=1}^{i} \xi_j, i \in \mathbf{Z}_{>0}$ be a point process and let $N_t = \inf\{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}; \tau_n \leq t < \tau_{n+1}\}, t \in [0,T]$ be its associated renewal process. $X^\pi_{\tau_i}, i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ denotes the Euler-Maruyama scheme of (1) with $X^\pi_0 = x$ and the random partition $\pi = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{N_T} \leq T\}$. We define $q_n, n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, for every $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ and $s_0 = 0 < s_1 < \cdots < s_n < T$, $q_n(s_0, s_1, \ldots, s_n) = \int_{T-s_n}^{\infty} dx f_\xi(x) \prod_{i=0}^{n-1} f_\xi(s_{i+1} - s_i)$ and $q_0(s_0) \equiv 1$.

2 Basic form of Parametrix method

Theorem 2.1 (P. Andersson, V. Bally and A. Kohatsu-Higa (2015)). *Suppose that the coefficients of* (1) *satisfy* $\sigma \in C^2_b(\mathbf{R})$, $b \in C^1_b(\mathbf{R})$ *and* $a := \sigma^2$ *is uniformly elliptic. Then, for every* $f \in C^\infty_c(\mathbf{R})$,

$$\mathbf{E}[f(X_T)] = \mathbf{E}\left[\frac{f(X^\pi_T)}{q_{N_T}(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{N_T})} \prod_{i=0}^{N_T - 1} \theta_{\tau_{i+1}-\tau_i}(X^\pi_{\tau_i}, X^\pi_{\tau_{i+1}})\right].$$

*Dept. of Mathematics, Ritsumeikan University, 1-1-1 Nojihigashi, Kusatsu, Shiga 525-8577, Japan, E-mail: ra0019ff@ed.ritsumei.ac.jp

where for every $t \in [0,T]$ and $x, y \in \mathbf{R}$,

$$\theta_t(x,y) = \frac{1}{2}\left(a''(y) + (a(y)-a(x))h_t^{(2)}(x,y) + 2a'(y)h_t^{(1)}(x,y)\right) - \left(b'(y) + (b(y)-b(x))h_t^{(1)}(x,y)\right),$$

$h_t^{(1)}(x,y) = -\frac{y-x-b(x)t}{a(x)t}$ *and* $h_t^{(2)}(x,y) = (\frac{y-x-b(x)t}{a(x)t})^2 - \frac{1}{a(x)t}$. *Also, if there exists ω such that $N_T(\omega) = 0$, then we understand* $\prod_{i=0}^{N_T(\omega)-1} \theta_{\tau_{i+1}-\tau_i}(X^\pi_{\tau_i}(\omega), X^\pi_{\tau_{i+1}}(\omega)) = 1$.

3 Samplings of the sequence ξ_i

Once one defines f_ξ, we can obtain the concrete Parametrix method.

3.1 Exponential sampling

We arbitrarily choose $\lambda > 0$. Let $\xi_i, i \in \mathbf{Z}_{>0}$ be a sequence of i.i.d. random variables with common density $f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x), x \in \mathbf{R}$. Namely, the common distribution of ξ_i is the Exponential distribution with parameter λ and N_t is a Poisson process. Also, for every $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ and $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n < T$, $q_n(s_0, s_1, \ldots, s_n) = e^{-\lambda T}\lambda^{N_T}$.

3.2 Beta sampling

We arbitrarily choose $\overline{\tau} > T$ and $\gamma \in (0,1)$. Let $\xi_i, i \in \mathbf{Z}_{>0}$ be a sequence of i.i.d. random variables with common density $f_\xi(x) = \frac{1-\gamma}{x^\gamma \overline{\tau}^{1-\gamma}}\mathbf{1}_{(0,\overline{\tau})}(x), x \in \mathbf{R}$. Then, the common distribution $F_\xi(x) = (\frac{x}{\overline{\tau}})^{1-\gamma}\mathbf{1}_{(0,\overline{\tau})}(x) + \mathbf{1}_{[\overline{\tau},\infty)}(x), x \in \mathbf{R}$. Also, for every $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ and $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n < T$, $q_n(s_0, s_1, \ldots, s_n) = (1 - (\frac{T-s_n}{\overline{\tau}})^{1-\tau})(\frac{1-\gamma}{\overline{\tau}^{1-\gamma}})^n \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(s_{i+1}-s_i)^\gamma}$.

3.3 Gamma sampling

We arbitrarily choose $\gamma \in (1-\alpha, 1)$ and $\vartheta > 0$. Now, we need to choose $\alpha \in (0,1)$ in Forward method, too. Let $\xi_i, i \in \mathbf{Z}_{>0}$ be a sequence of i.i.d. random variables with common density $f_\xi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)\vartheta^{1-\gamma}}\frac{1}{x^\gamma}e^{-\frac{x}{\vartheta}}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x), x \in \mathbf{R}$. Namely, the common distribution of ξ_i is the Gamma distribution with parameter $1-\gamma$ and ϑ. Also, for every $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ and $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n < T$, $q_n(s_0, s_1, \ldots, s_n) = \frac{\Gamma(1-\gamma, \frac{T-s_n}{\vartheta})}{\Gamma(1-\gamma)}(\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)\vartheta^{1-\gamma}})^n e^{-\frac{s_n}{\vartheta}} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(s_{i+1}-s_i)^\gamma}$.

Here, Beta sampling and Gamma sampling are two example of importance samplings which lead to methods with finite variance. Note that we must choose parameters for smaller variance and shorter trial time. However, the variance is still big even if we use importance sampling and its application although successful has some limitations. Thus, we suggest a new localization technique and give their theoretical properties in this talk. This technique can theoretically improve the importance sampling methods proposed above. In some sense, it becomes a space importance sampling method while the ones described above are time importance sampling methods.

アルゴリズム的ランダムネスによる確率概念の操作的特徴付け *

An operational characterization of the notion of probability by algorithmic randomness

只木 孝太郎

中部大学 工学部 情報工学科
E-mail: tadaki@cs.chubu.ac.jp
http://www2.odn.ne.jp/tadaki/

確率概念は、科学技術のほとんど全ての分野で重要な役割を果たす。しかしながら、現代数学において、確率論とは測度論のことであり、"確率概念"の操作的な特徴付けは、未だ"確立"されていない。即ち、"確率"とは操作的にはどのような概念なのか？ この点が不明確なまま、科学技術の様々な分野で、主に確率モデルの利用を通じて、確率概念が広く用いられているのである。本発表では、アルゴリズム的ランダムネスの概念装置に基づいて、確率概念の操作的特徴付けを提示する。アルゴリズム的ランダムネス（Algorithmic Randomness）は、数学基礎論の一分野であり、与えられた個々の無限列について、ランダムか否かの分類を可能にする理論体系である [2, 3, 1]。本発表では、Bernoulli 測度に関する Martin-Löf ランダム性に基づいて確率概念の操作的特徴付けを提示する。

確率概念の操作的特徴付けについては、前世紀の前半、von Mises が包括的な試みを展開した [9, 10]。彼は、確率概念の操作的特徴付けとして、コレクティフ（Kollektiv）と呼ぶ概念を導入し、それに基いて確率論と統計学を再構成しようとした。しかし、Ville [8] の研究を通じて、von Mises が導入したそのままのコレクティフについては、ランダム性に関して十分な性質を持たないことが明らかになった。また、そもそもコレクティフには、確率ゼロの事象が起こる可能性を排除できないという内在的な欠陥があった。その後、ランダム性の定義に関しては、Martin-Löf [2] が Martin-Löf ランダム性の概念を導入し、これが、その後のアルゴリズム的ランダムネスの発展の一つの大きな礎となった。

Martin-Löf は、論文 [2] で Martin-Löf ランダム性の概念を導入した際に、Bernoulli 測度に関する Martin-Löf ランダム性の概念も同時に導入した。そして、正にこれこそが von Mises が"コレクティフ"と名付けた概念に一致するものである、と述べている。しかしながらその際、Martin-Löf 自身は、論文 [2] で Bernoulli 測度に関する Martin-Löf ランダム性に基いて確率論の再構成を行おうとはしなかった。今日においても、アルゴリズム的ランダムネスの興味は、専ら様々なランダム性概念の導入とそれらの分類にあり、アルゴリズム的ランダム性概念に基いて、確率概念の操作的特徴付けを与え、それにより確率論を再構成しようとは、目指していないように見える。そして、実際、そのような研究も見当たらない。

本発表では、Bernoulli 測度に関する Martin-Löf ランダム性に基づいて、von Mises の思想に従い、確率概念の操作的特徴付けを提示する。わかり易さのため、本発表では特に、有限な確率空間、即ち、標本空間が有限集合となる場合を扱う。そして、条件付き確率や、事象および確率変数に関する独立性の概念が、この操作的特徴付けによってどのように等価に表現されるかを見る。

*本研究は、JSPS 科研費 15K04981 の助成、並びに中部大学 特別研究費（A II）の助成を受けたものである。そして、本研究は、発表者が National University of Singapore の Institute for Mathematical Sciences に滞在中に発展したものである。関係各位に感謝する。

この操作的特徴付けは確率概念を用いるあらゆる分野に適用可能であり、科学技術全般に広範な応用が可能である。基礎科学への応用の例として、量子力学への応用（ボルン則の精密化）については、2014 年度確率論シンポジウムで報告した [6]。今回の発表では、工学への応用の例として、情報理論ならびに暗号理論への応用について言及する。

参考文献

[1] R. G. Downey and D. R. Hirschfeldt, *Algorithmic Randomness and Complexity.* Springer-Verlag, New York, 2010.

[2] P. Martin-Löf, "The definition of random sequences," *Inform. and Control*, vol. 9, pp. 602–619, 1966.

[3] A. Nies, *Computability and Randomness.* Oxford University Press, Inc., New York, 2009.

[4] K. Tadaki, An operational characterization of the notion of probability by algorithmic randomness. Proceedings of the 37th Symposium on Information Theory and its Applications (SITA2014), 5.4.1, pp. 389–394, December 9-12, 2014, Unazuki, Toyama, Japan.

[5] K. Tadaki, An operational characterization of the notion of probability by algorithmic randomness and its application to cryptography. Proceedings of the 32nd Symposium on Cryptography and Information Security (SCIS2015), 2D4-3, January 20-23, 2015, Kokura, Japan.

[6] 只木孝太郎, アルゴリズム的ランダムネスによる量子力学の再構成. 2014 年度確率論シンポジウム, 2014 年 12 月 16 日～12 月 19 日, 京都大学 数理解析研究所.

[7] K. Tadaki, An operational characterization of the notion of probability by algorithmic randomness and its application to science and technology. To appear in the Proceedings of the Workshop on Informatics 2015 (WiNF 2015), December 5, 2015, Meijo University, Nagoya, Japan.

[8] J. Ville, "Étude Critique de la Notion de Collectif," Monographies des Probabilités. Calcul des Probabilités et ses Applications. Gauthier-Villars, Paris, 1939.

[9] R. von Mises, *Probability, Statistics and Truth.* Dover Publications, Inc., New York, 1957.

[10] R. von Mises, *Mathematical Theory of Probability and Statistics.* Academic Press Inc., New York, 1964.

指数の異なる 2 つの縮小された自己相似過程からなるポテンシャルをもつ拡散過程

鈴木 由紀 （慶大医）

$\mathbb{W}$ を $\mathbb{R}$ 上の関数 w で以下の (i)-(iii) を満たすもの全体とする．(i) $w(0)=0$, (ii) w は $[0,\infty)$ 上右連続で左極限をもつ, (iii) w は $(-\infty,0]$ 上左連続で右極限をもつ．$\alpha_1,\alpha_2>0$ に対し, P_{α_1,α_2} を $\mathbb{W}$ 上の確率測度で以下の (i)-(iii) を満たすものとする．(i) $\{w(-x),x\geq 0,P_{\alpha_1,\alpha_2}\}$ は ${\alpha_1}^{-1}$ -自己相似過程である, (ii) $\{w(x),x\geq 0,P_{\alpha_1,\alpha_2}\}$ は ${\alpha_2}^{-1}$ -自己相似過程である, (iii) (i) と (ii) の 2 つの過程は独立である．$0<c<\min\{1/(2\alpha_1),1/(2\alpha_2)\}$ をとり, 以下これを固定する．$w\in\mathbb{W}$ と $\lambda>0$ に対し, $w_\lambda\in\mathbb{W}$ を $w_\lambda(x)=\lambda e^{-c\lambda}w(x),x\in\mathbb{R},$ により定義する．$[0,\infty)$ 上の連続関数全体を Ω とし, $\omega\in\Omega$ に対し $X(t)=X(t,\omega)=\omega(t)$ とおく．$w\in\mathbb{W}$ と $x_0\in\mathbb{R}$ に対し, Ω 上の確率測度 $P_w^{x_0}$ を $\{X(t),t\geq 0,P_w^{x_0}\}$ が生成作用素 $\mathcal{L}_w=\frac{1}{2}e^{w(x)}\frac{d}{dx}(e^{-w(x)}\frac{d}{dx})$ をもつ x_0 から出発する拡散過程となるものとして定義する．さらに $\mathbb{W}\times\Omega$ 上の確率測度 $\mathcal{P}_\lambda^{x_0}$ を $\mathcal{P}_\lambda^{x_0}(dwd\omega)=P_{\alpha_1,\alpha_2}(dw)P_{w_\lambda}^{x_0}(d\omega)$ により定義する．本講演では, $\{X(t),t\geq 0,\mathcal{P}_\lambda^0\}$ の時刻 $t=e^\lambda$ での挙動 $(\lambda\to\infty)$ について報告する．

$\widetilde{\alpha}_i=c\alpha_i(<1/2),i=1,2,$ とおき, $w\in\mathbb{W}$ と $\lambda>0$ に対し $\tau_\lambda w\in\mathbb{W}$ を以下で定義する．

$$(\tau_\lambda w)(x)=\begin{cases}\lambda^{-1}w(e^{\widetilde{\alpha}_1\lambda}x), & x\leq 0,\\ \lambda^{-1}w(e^{\widetilde{\alpha}_2\lambda}x), & x>0.\end{cases}$$

すると $\{\tau_\lambda w_\lambda,P_{\alpha_1,\alpha_2}\}\stackrel{\mathrm{d}}{=}\{w,P_{\alpha_1,\alpha_2}\}$ が成立する．$w\in\mathbb{W}$ に対し, $w^*(x)=w(x-)\vee w(x+),w_*(x)=w(x-)\wedge w(x+)$ と定義する．$w\in\mathbb{W}$ の中で $\limsup_{x\to\infty}\{w(x)-\inf_{0\leq y\leq x}w(y)\}=\limsup_{x\to-\infty}\{w(x)-\inf_{x\leq y\leq 0}w(y)\}=\infty$ を満たすもの全体を $\mathbb{W}^\#$ とする．$w\in\mathbb{W}^\#,\varepsilon>0$ に対し以下を定義する．

$$\begin{aligned}
&\zeta_1=\zeta_1(w)=\sup\{x\leq 0:w^*(x)-\inf_{x<y\leq 0}w(y)\geq 1-2\widetilde{\alpha}_1\},\\
&\zeta_2=\zeta_2(w)=\inf\{x\geq 0:w^*(x)-\inf_{0\leq y<x}w(y)\geq 1-2\widetilde{\alpha}_2\},\\
&V_1=V_1(w)=\inf\{w_*(x):\zeta_1<x\leq 0\},\quad V_2=V_2(w)=\inf\{w_*(x):0\leq x<\zeta_2\},\\
&\mathbf{b}_1=\mathbf{b}_1(w)=\begin{cases}\{\zeta_1<x\leq 0:w_*(x)=V_1\}, & w(\zeta_1)=V_1\text{ の場合},\\ \{\zeta_1\leq x\leq 0:w_*(x)=V_1\}, & w(\zeta_1)\neq V_1\text{ の場合},\end{cases}\quad b_1=b_1(w)=\min\mathbf{b}_1(w),\\
&\mathbf{b}_2=\mathbf{b}_2(w)=\begin{cases}\{0\leq x<\zeta_2:w_*(x)=V_2\}, & w(\zeta_2)=V_2\text{ の場合},\\ \{0\leq x\leq\zeta_2:w_*(x)=V_2\}, & w(\zeta_2)\neq V_2\text{ の場合},\end{cases}\quad b_2=b_2(w)=\max\mathbf{b}_2(w),\\
&b_{1,\varepsilon}=b_{1,\varepsilon}(w)=\begin{cases}b_1, & w(b_1)>w(b_1+)\text{ の場合},\\ b_1-\varepsilon, & w(b_1)\leq w(b_1+)\text{ の場合},\end{cases}\\
&b_{2,\varepsilon}=b_{2,\varepsilon}(w)=\begin{cases}b_2, & w(b_2)>w(b_2-)\text{ の場合},\\ b_2+\varepsilon, & w(b_2)\leq w(b_2-)\text{ の場合},\end{cases}\\
&M_1=M_1(w)=\sup\{w^*(x):b_1<x\leq 0\}\text{（}b_1=0\text{ の場合は }M_1=0\text{），}\\
&M_2=M_2(w)=\sup\{w^*(x):0\leq x<b_2\}\text{（}b_2=0\text{ の場合は }M_2=0\text{），}\\
&K_i=K_i(w)=M_i(w)\vee(V_i(w)+1-2\widetilde{\alpha}_i),\quad i=1,2.
\end{aligned}$$

ここで, $\mathbb{A}=\{w\in\mathbb{W}^\#:K_1+\widetilde{\alpha}_1<K_2+\widetilde{\alpha}_2\}$, $\mathbb{B}=\{w\in\mathbb{W}^\#:K_1+\widetilde{\alpha}_1>K_2+\widetilde{\alpha}_2\}$ とおき, さらに $\lambda>0$ に対し, $\mathbb{A}_\lambda=\{w\in\mathbb{W}^\#:\tau_\lambda w_\lambda\in\mathbb{A}\}$, $\mathbb{B}_\lambda=\{w\in\mathbb{W}^\#:\tau_\lambda w_\lambda\in\mathbb{B}\}$ とおくと, $P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{A}_\lambda\}=P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{A}\}$, $P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{B}_\lambda\}=P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{B}\}$ が成立する．

定理 1. $P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{W}^\#\}=1$ と仮定すると, 任意の $\varepsilon>0$ に対して以下の (i)-(ii) が成立する．

(i) $\lim_{\lambda\to\infty}P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{E}_{1,\lambda,\varepsilon}|\mathbb{A}_\lambda\}=1.$ (ii) $\lim_{\lambda\to\infty}P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{E}_{2,\lambda,\varepsilon}|\mathbb{B}_\lambda\}=1.$

ここで, $\mathbb{E}_{i,\lambda,\varepsilon}=\{w\in\mathbb{W}^\#:p_{i,\lambda,\varepsilon}(w)>1-\varepsilon\},i=1,2,$

$p_{1,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{w_\lambda}\{e^{-\widetilde{\alpha}_1\lambda}X(e^\lambda) \in U_\varepsilon(\mathbf{b}_1(\tau_\lambda w_\lambda)) \cap (b_{1,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda), 0)\}$,

$p_{2,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{w_\lambda}\{e^{-\widetilde{\alpha}_2\lambda}X(e^\lambda) \in U_\varepsilon(\mathbf{b}_2(\tau_\lambda w_\lambda)) \cap (0, b_{2,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda))\}$, $U_\varepsilon(\mathbf{a})$ は $\mathbf{a}(\subset \mathbb{R})$ の ε-近傍.

系 2. $P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{A} \cup \mathbb{B}\} = 1$ と仮定すると, $\lim_{\lambda\to\infty} \mathcal{P}^0_\lambda\{Y(e^\lambda) \in U_\varepsilon(\mathbf{b}(\tau_\lambda w_\lambda))\} = 1$. ここで,

$$Y(t) = Y(t,\omega) = \begin{cases} t^{-\widetilde{\alpha}_1}X(t,\omega), & X(t,\omega) \le 0 \text{ の場合}, \\ t^{-\widetilde{\alpha}_2}X(t,\omega), & X(t,\omega) > 0 \text{ の場合}, \end{cases} \quad \mathbf{b}(w) = \begin{cases} \mathbf{b}_1, \ w \in \mathbb{A}, \\ \mathbf{b}_2, \ w \in \mathbb{B}. \end{cases}$$

次に $\omega \in \Omega$ に対し $\underline{X}(t) = \underline{X}(t,\omega) = \min_{0\le s\le t} X(s,\omega)$, $\overline{X}(t) = \overline{X}(t,\omega) = \max_{0\le s\le t} X(s,\omega)$ とおき, 我々の過程の最小値過程 $\{\underline{X}(t), t \ge 0, \mathcal{P}^0_\lambda\}$ と最大値過程 $\{\overline{X}(t), t \ge 0, \mathcal{P}^0_\lambda\}$ の $t = e^\lambda$ での挙動 $(\lambda \to \infty)$ について調べる. $w \in \mathbb{W}^\#$, $\gamma \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ に対して以下を定義する.

$$\zeta_1(\gamma) = \zeta_1(\gamma, w) = \sup\{x \le 0 : w^*(x) - \inf_{x<y\le 0} w(y) \ge 1 - 2\widetilde{\alpha}_1 + \gamma\} \ (\zeta_1(0) = \zeta_1 \text{ である}),$$

$$\zeta_2(\gamma) = \zeta_2(\gamma, w) = \inf\{x \ge 0 : w^*(x) - \inf_{0\le y<x} w(y) \ge 1 - 2\widetilde{\alpha}_2 + \gamma\} \ (\zeta_2(0) = \zeta_2 \text{ である}),$$

$$\zeta_{1,\varepsilon} = \zeta_{1,\varepsilon}(w) = \begin{cases} \zeta_1(\varepsilon), & w(\zeta_1(\varepsilon)) \le w(\zeta_1(\varepsilon)+) \text{ の場合}, \\ \zeta_1(\varepsilon) - \varepsilon, & w(\zeta_1(\varepsilon)) > w(\zeta_1(\varepsilon)+) \text{ の場合}, \end{cases}$$

$$\zeta_{2,\varepsilon} = \zeta_{2,\varepsilon}(w) = \begin{cases} \zeta_2(\varepsilon), & w(\zeta_2(\varepsilon)) \le w(\zeta_2(\varepsilon)-) \text{ の場合}, \\ \zeta_2(\varepsilon) + \varepsilon, & w(\zeta_2(\varepsilon)) > w(\zeta_2(\varepsilon)-) \text{ の場合}, \end{cases}$$

$$\rho_1(\gamma) = \rho_1(\gamma, w) = \sup\{x \le 0 : w(x) > K_2 - \widetilde{\alpha}_1 + \widetilde{\alpha}_2 + \gamma\}, \quad \rho_1 = \rho_1(0),$$

$$\rho_2(\gamma) = \rho_2(\gamma, w) = \inf\{x \ge 0 : w(x) > K_1 + \widetilde{\alpha}_1 - \widetilde{\alpha}_2 + \gamma\}, \quad \rho_2 = \rho_2(0),$$

$$\rho_{1,\varepsilon} = \rho_{1,\varepsilon}(w) = \begin{cases} \rho_1(\varepsilon), & w(\rho_1(\varepsilon)) = w(\rho_1(\varepsilon)+) \text{ かつ } \rho_1(\varepsilon) \ne 0 \text{ の場合}, \\ \rho_1(\varepsilon) - \varepsilon, & w(\rho_1(\varepsilon)) > w(\rho_1(\varepsilon)+) \text{ の場合}, \\ -\varepsilon, & \rho_1(\varepsilon) = 0 \text{ の場合}, \end{cases}$$

$$\rho_{2,\varepsilon} = \rho_{2,\varepsilon}(w) = \begin{cases} \rho_2(\varepsilon), & w(\rho_2(\varepsilon)) = w(\rho_2(\varepsilon)-) \text{ かつ } \rho_2(\varepsilon) \ne 0 \text{ の場合}, \\ \rho_2(\varepsilon) + \varepsilon, & w(\rho_2(\varepsilon)) > w(\rho_2(\varepsilon)-) \text{ の場合}, \\ \varepsilon, & \rho_2(\varepsilon) = 0 \text{ の場合}. \end{cases}$$

ここで, $\mathbb{A}^1 = \{w \in \mathbb{A} : V_1 + 1 - 2\widetilde{\alpha}_1 > M_1\}$, $\mathbb{A}^2 = \{w \in \mathbb{A} : V_1 + 1 - 2\widetilde{\alpha}_1 < M_1\}$, $\mathbb{B}^1 = \{w \in \mathbb{B} : V_2 + 1 - 2\widetilde{\alpha}_2 > M_2\}$, $\mathbb{B}^2 = \{w \in \mathbb{B} : V_2 + 1 - 2\widetilde{\alpha}_2 < M_2\}$ とおき, さらに $\lambda > 0, i = 1, 2$ に対し, $\mathbb{A}^i_\lambda = \{w \in \mathbb{A}_\lambda : \tau_\lambda w_\lambda \in \mathbb{A}^i\}$, $\mathbb{B}^i_\lambda = \{w \in \mathbb{B}_\lambda : \tau_\lambda w_\lambda \in \mathbb{B}^i\}$ とおく. すると $P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{A}^i_\lambda\} = P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{A}^i\}$, $P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{B}^i_\lambda\} = P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{B}^i\}$, $\lambda > 0$, $i = 1, 2$, が成立する.

以下, $\varepsilon(\lambda) > 0, \lambda > 0$, を $\lim_{\lambda\to\infty} \varepsilon(\lambda) = 0$, $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\varepsilon(\lambda) = \infty$, を満たす任意の関数とする.

定理 3. $P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{W}^\#\} = 1$ と仮定すると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して以下の (i)-(iii) が成立する.
(i) $\lim_{\lambda\to\infty} P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{E}_{3,\lambda,\varepsilon} | \mathbb{A}_\lambda\} = 1$. (ii) $\lim_{\lambda\to\infty} P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{E}_{4,\lambda,\varepsilon} | \mathbb{B}^1_\lambda\} = 1$. (iii) $\lim_{\lambda\to\infty} P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{E}_{5,\lambda,\varepsilon} | \mathbb{B}^2_\lambda\} = 1$.
ここで, $\mathbb{E}_{i,\lambda,\varepsilon} = \{w \in \mathbb{W}^\# : p_{i,\lambda,\varepsilon}(w) > 1 - \varepsilon\}, 3 \le i \le 5$,

$p_{3,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{w_\lambda}\{\zeta_{1,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda) < e^{-\widetilde{\alpha}_1\lambda}\underline{X}(e^\lambda) < \zeta_1(-\varepsilon(\lambda), \tau_\lambda w_\lambda)\}$,

$p_{4,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{w_\lambda}\{\rho_{1,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda) < e^{-\widetilde{\alpha}_1\lambda}\underline{X}(e^\lambda) < \rho_1(-\varepsilon(\lambda), \tau_\lambda w_\lambda)\}$,

$p_{5,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{w_\lambda}\{\rho_{1,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda) < e^{-\widetilde{\alpha}_1\lambda}\underline{X}(e^\lambda) < \rho_1(-\varepsilon, \tau_\lambda w_\lambda)\}$.

定理 4. $P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{W}^\#\} = 1$ と仮定すると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 以下の (i)-(iii) が成立する.
(i) $\lim_{\lambda\to\infty} P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{E}_{6,\lambda,\varepsilon} | \mathbb{A}^1_\lambda\} = 1$. (ii) $\lim_{\lambda\to\infty} P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{E}_{7,\lambda,\varepsilon} | \mathbb{A}^2_\lambda\} = 1$. (iii) $\lim_{\lambda\to\infty} P_{\alpha_1,\alpha_2}\{\mathbb{E}_{8,\lambda,\varepsilon} | \mathbb{B}_\lambda\} = 1$.
ここで, $\mathbb{E}_{i,\lambda,\varepsilon} = \{w \in \mathbb{W}^\# : p_{i,\lambda,\varepsilon}(w) > 1 - \varepsilon\}, 6 \le i \le 8$,

$p_{6,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{w_\lambda}\{\rho_2(-\varepsilon(\lambda), \tau_\lambda w_\lambda) < e^{-\widetilde{\alpha}_2\lambda}\overline{X}(e^\lambda) < \rho_{2,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda)\}$,

$p_{7,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{w_\lambda}\{\rho_2(-\varepsilon, \tau_\lambda w_\lambda) < e^{-\widetilde{\alpha}_2\lambda}\overline{X}(e^\lambda) < \rho_{2,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda)\}$,

$p_{8,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{w_\lambda}\{\zeta_2(-\varepsilon(\lambda), \tau_\lambda w_\lambda) < e^{-\widetilde{\alpha}_2\lambda}\overline{X}(e^\lambda) < \zeta_{2,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda)\}$.

参考文献：[1] Brox, T. (1986) [2] Kawazu, K.-Tamura, Y.-Tanaka, H. (1989) [3] Suzuki, Y. (2008)

Lamplighter random walks on fractals

中村 ちから （熊谷 隆　氏との共同研究)
京都大学　数学数理解析専攻

2015.12.18

1　動機と先行研究

ランプライターグラフとは, 通常のグラフの各頂点にランプ ($\{0,1\}$) をおき, どの頂点のランプがついているかをも加味したグラフである. 近年, 頂点数が多項式程度に増大するグラフ上のランダムウォークを解析する一般的手法が確立されつつあるが, 一方でグラフの頂点数が指数増大するようなグラフ上のランダムウォークを解析する一般的手法はいまだないといってもよい状況である. そしてランプライターグラフの頂点数は指数増大するグラフである. これは通常のグラフにくらべどの頂点のランプがついているかいないかの情報が加味されていて, ランプライターグラフの方がより多くの" 情報量" を持っているため, と説明できる. このような頂点数が指数増大するグラフ上のランダムウォークの性質の解析をすることが, この研究の動機である.

ランプライターグラフ上のランダムウォークについて, $G = \mathbb{Z}^d$ の場合にはいくつかの先行研究がある. $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークの On-diagonal 熱核評価については [2]、$\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$ 上のランダムウォークの重複対数の法則については [3] によって得られている. （これらの結果の詳細は講演中に説明する.）本研究は G をより一般的なグラフに置き換えたとき, これらの結果がどのように変化するかを調べることが目的である.

2　設定と主結果

グラフ $G = (V, E)$ は可算無限, 連結, 一様有界（つまり $\sup_{v \in V(G)} \deg v < \infty$）とする. G のランプライターグラフ（$\mathbb{Z}_2 \wr G$ とかく）は, 頂点集合が

$$V(\mathbb{Z}_2 \wr G) = \{(f,v) \in (\mathbb{Z}_2)^G \times V(G) \mid \sharp \mathrm{Supp}\, f < \infty\}$$

で与えられるグラフである. $(f,v) \in V(\mathbb{Z}_2 \wr G)$ に対し v が点灯夫（ランプライター）のいる場所を表し f で G のどの頂点のランプがついているかを表している. また,G の頂点を通常の文字 $x, y, \cdots$ で表し $\mathbb{Z}_2 \wr G$ の元を太文字 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \cdots$ で表すことにする.

$\{X_n\}_{n \geq 0}$ は G 上の単純ランダムウォークとする. G と $\{X_n\}$ に次の条件を仮定する.

仮定 2.1.　*(a)*（増大度条件） 底空間 G の中心 $x \in V(G)$, 半径 r の中の頂点数を $V_G(x,r)$ とかくとき, $V_G(x,r)$ は

$$c_1 r^{d_f} \leq V_G(x,r) \leq c_2 r^{d_f}$$

を任意の $x \in V(G)$ と $r \geq 0$ に対してみたす.

(b)（*Sub-Gauss* 型熱核評価）G 上の単純ランダムウォーク $\{X_n\}$ は,

$$p_n^G(x,y) \leq \frac{c_3}{n^{d_f/d_w}} \exp\left[-c_4 \left(\frac{d_G(x,y)^{d_w}}{n}\right)^{\frac{1}{d_w-1}}\right].$$

$$p_n^G(x,y) + p_{n+1}^G(x,y) \geq \frac{c_5}{n^{d_f/d_w}} \exp\left[-c_6 \left(\frac{d_G(x,y)^{d_w}}{n}\right)^{\frac{1}{d_w-1}}\right].$$

を任意の $x, y \in V(G)$ と $n \geq 0$ で $d_G(x,y) \leq n$ なるものに対して満たす.

この条件をみたす G と $\{X_n\}$ に対し, 各頂点にランプを置いてランプライターグラフ $\mathbb{Z}_2 \wr G$ を考えこのランプライターグラフの上のランダムウォーク $\{Y_n = (\eta_n, X_n)\}_{n\geq 0}$ を考える. これは G 上をランダムに動き, つぎに G 上のランプをランダムに on, off の操作をする, という操作を繰り返し行うものである. 主結果は次の通りである.

定理 2.2 (On-diagonal 熱核評価; Kumagai, N(2015))**.** 仮定 *2.1* が成り立つとする. このとき,

$$p_{2n}^{\mathbb{Z}_2 \wr G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \approx \exp[-n^{\frac{d_f}{d_f+d_w}}]$$

が全ての $\boldsymbol{x} = (\eta, x) \in \mathbb{Z}_2 \wr G$ に対し成り立つ.

定理 2.3 (重複対数の法則; Kumagai, N(2015))**.** 仮定 *2.1* が成り立つとする.

(I); $d_f/d_w < 1$ のとき. 正の定数 $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14} > 0$ があって次が成り立つ;

$$c_{11} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{d_{\mathbb{Z}_2 \wr G}(Y_0, Y_n)}{n^{d_f/d_w}(\log\log n)^{1-d_f/d_w}} \leq c_{12}, \quad P_{\boldsymbol{x}}\text{-}a.s. \quad \textit{for all } \boldsymbol{x} \in V(\mathbb{Z}_2 \wr G),$$

$$c_{13} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{d_{\mathbb{Z}_2 \wr G}(Y_0, Y_n)}{n^{d_f/d_w}(\log\log n)^{-d_f/d_w}} \leq c_{14}, \quad P_{\boldsymbol{x}}\text{-}a.s. \quad \textit{for all } \boldsymbol{x} \in V(\mathbb{Z}_2 \wr G).$$

(II); $d_f/d_w > 1$ のとき. 正の定数 $c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24} > 0$ があって次が成り立つ;

$$c_{21} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{d_{\mathbb{Z}_2 \wr G}(Y_0, Y_n)}{n} \leq c_{22}, \qquad P_{\boldsymbol{x}}\text{-}a.s. \quad \textit{for all } \boldsymbol{x} \in V(\mathbb{Z}_2 \wr G),$$

$$c_{23} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{d_{\mathbb{Z}_2 \wr G}(Y_0, Y_n)}{n} \leq c_{24}, \qquad P_{\boldsymbol{x}}\text{-}a.s. \quad \textit{for all } \boldsymbol{x} \in V(\mathbb{Z}_2 \wr G).$$

参考文献

[1] Kumagai, T. and Nakamura, C.; *Lamplighter random walks on fractals.* preprint, available at `arXiv1505.00861`

[2] Pittet, C., Saloff-Coste, L.: *Amenable groups, isoperimetric profiles and random walks.* Geometric group theory down under (Canberra, 1996), 293-316, de Gruyter, Berlin, 1999.

[3] Revelle, D.: *Rate of escape of random walks on wreath products and related groups.* Ann. Probab. **31** (2003), no. 4, 1917-1934.

The quenched critical point for self-avoiding walk on random conductors

Yuki Chino* and Akira Sakai†
Department of Mathematics
Hokkaido University

Self-avoiding walk (SAW) is a statistical-mechanical model for linear polymers. We have many rigorous results on SAW, especially in $d > 4$ [1, 5]. However in two or three dimensions, there still remain open problems [6]. In 1981, B. K. Chakrabarti and J. Kartész first introduced the random environment to SAW [2]. Our interest is to understand how the random environment affects the behavior of the observables concerning SAW around the critical point. In this talk, we show the quenched critical point is almost surely a constant and estimate upper and lower bounds.

Let $\mathbb{B}^d$ denote the set of nearest-neighbor bonds in $\mathbb{Z}^d$, let $\Omega(x)$ be the set of nearest-neighbor self-avoiding paths on $\mathbb{Z}^d$ from x, and let $\boldsymbol{X} = \{X_b\}_{b\in\mathbb{B}^d}$ be a collection of i.i.d. bounded random variables whose law and expectation are denoted $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$ and $\mathbb{E}_{\boldsymbol{X}}$, respectively. Given the energy cost of the bond $h \in \mathbb{R}$ and the random environment $\boldsymbol{X}$ and the strength of randomness $\beta \geq 0$, we define the quenched susceptibility at $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$\hat{\chi}_{h,\beta,\boldsymbol{X}}(x) = \sum_{\omega\in\Omega(x)} e^{-\sum_{j=1}^{|\omega|}(h+\beta X_{b_j})},$$

where $|\omega|$ is the length of ω and b_j is the j-th bond of ω. Because of the inhomogeneity of $\boldsymbol{X}$, the quenched susceptibility is not translation invariant and does depend on the location of the reference point x. We also define the number of SAWs in random environment:

$$\hat{c}_{\beta,\boldsymbol{X}}(x;n) = \sum_{\omega\in\Omega(x)} e^{-\beta\sum_{j=1}^{|\omega|} X_{b_j}} 1_{\{|\omega|=n\}}.$$

Therefore, we have

$$\hat{\chi}_{h,\beta,\boldsymbol{X}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-hn}\hat{c}_{\beta,\boldsymbol{X}}(x;n).$$

Since $\hat{\chi}_{h,\beta,\boldsymbol{X}}(x)$ is monotonic in h, we can define the quenched critical point:

$$\hat{h}^{\mathsf{q}}_{\beta,\boldsymbol{X}}(x) = \inf\{h \in \mathbb{R} : \hat{\chi}_{h,\beta,\boldsymbol{X}}(x) < \infty\}.$$

*chino@math.sci.hokudai.ac.jp
†sakai@math.sci.hokudai.ac.jp

We denote $c(n)$ be the number of the homogeneous SAWs. By virtue of the self-avoidance constraint on ω and the i.i.d. property of $\boldsymbol{X}$, we can directly compute the annealed susceptibility $\mathbb{E}_{\boldsymbol{X}}[\hat{\chi}_{h,\beta,\boldsymbol{X}}(x)]$

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{X}}[\hat{\chi}_{h,\beta,\boldsymbol{X}}(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(h-\log\lambda_\beta)n} c(n),$$

where $\lambda_\beta = \mathbb{E}_{\boldsymbol{X}}[e^{-\beta X_b}]$. Then the annealed critical point must be defined:

$$h_\beta^{\mathsf{a}} = \log\mu + \log\lambda_\beta,$$

so that $\mathbb{E}_{\boldsymbol{X}}[\hat{\chi}_{h,\beta,\boldsymbol{X}}(x)] < \infty$ if and only if $h > h_\beta^{\mathsf{a}}$. By Jensen's inequality,

$$h_\beta^{\mathsf{a}} \geq \log\mu - \beta\mathbb{E}_{\boldsymbol{X}}[X_b].$$

The following theorem is the main result of this talk.

Theorem 1. *Let $d \geq 1$ and $\beta \geq 0$. The quenched critical point $\hat{h}^{\mathsf{q}}_{\beta,\boldsymbol{X}}(x)$ is $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$-almost surely a constant that does not depend on the location of the reference point $x \in \mathbb{Z}^d$. Moreover, by abbreviating $\hat{h}^{\mathsf{q}}_{\beta,\boldsymbol{X}}(x)$ as $\hat{h}^{\mathsf{q}}_\beta$, we have*

$$\log\mu - \beta\mathbb{E}_{\boldsymbol{X}}[X_b] \leq \hat{h}^{\mathsf{q}}_\beta \leq h^{\mathsf{a}}_\beta, \qquad \mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}\text{-almost surely.}$$

For $d = 1$, in particular, the lower bound is an equality.

The key elements for the proof are the following:

- To prove that the quenched critical point is $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$-a.s. a constant we show translation invariance and ergodicity by following similar analysis to that in H. Lacoin [4].
- The upper bound (generally called the annealed bound) is trivial. On the other hand, the lower bound is derived from the second moment estimate by using the Paley-Zygmund inequality.

References

[1] D. Brydges and T. Spencer. Self-avoiding walk in 5 or more dimensions. *Commun. Math. Phys.* **97** (1985): 125–148.

[2] B. K. Chakrabarti and J. Kartész. The statistics of self-avoiding walk on a disordered lattice. *Z. Phys. B Cond. Mat.* **44** (1981): 221–223

[3] Y. Chino and A. Sakai. The quenched critical point for self-avoiding walk on random conductors. arXiv:1508.01262

[4] H. Lacoin. Non-coincidence of quenched and annealed connective constants on the supercritical planar percolation cluster. *Probab. Theory Relat. Fields* **159** (2014): 777–808.

[5] N. Madras and G. Slade. *The Self-Avoiding Walk* (Birkhäuser, 2013).

[6] G. Slade. The self-avoiding walk: A brief survey. *Surveys in Stochastic Processes* (J. Blath et al. eds., European Mathematical Society, 2011): 181–199.

Enlargement of subgraphs of infinite graphs by Bernoulli percolation

Kazuki Okamura*

We consider changes of properties of a subgraph of an infinite graph if we add open edges of Bernoulli percolation on the infinite graph to the subgraph. We give a triplet of an infinite graph, a subgraph of it, and, a property for graphs. Then, in a manner similar to the way that Hammersley's critical probability is defined, we can define two values associated with the triplet. We regard the two values as certain critical probabilities and compare them with Hammersley's one.

In this talk we will focus on the following cases that a property for graphs is being a transient subgraph, having infinitely many cut points, having no cut points, being a recurrent subset, and, being connected. Our results depend heavily on choices of the triplet.

*Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502, JAPAN. e-mail : kazukio@kurims.kyoto-u.ac.jp

Continuum Cascade Model of Directed Random Graphs

Yoshiaki Itoh
Institute of Statistical Mathematics, Tachikawa, Tokyo
e-mail: itoh@ism.ac.jp

In the cascade model by Cohen and Newman, the random directed graph has vertex set $\{1, ..., n\}$ in which the directed edges (i, j) occur independently with probability c for $i < j$ and probability zero for $i \geq j$. Let L_n denote the length of the longest path starting from vertex 1. We apply the Poisson approximation to the binomial distribution of the number of directed edges at each vertex and consider the continuum cascade model. We study the asymptotic behavior of L_n as n tends to infinity.

At step 1 we generate N_x points by the Poisson distribution $Pr(N = k) = \frac{x^k}{k!}e^{-x}$ on $[0, x]$. Each point is mutually independently distributed uniformly at random on $[0, x]$. At step $j(> 1)$, for each generated point at $x - y$, generated at the step $j - 1$, generate N_y points by the Poisson distribution $Pr(N = k) = \frac{y^k}{k!}e^{-y}$ uniformly at random on the interval $[x - y, x]$, independently from the points on other intervals at step j and independently from the points of previously generated intervals. We call the terminal interval any interval which did not generate any point. The terminal interval, which appeared at a step, remains a terminal interval after the step. We continue the steps as long as we have at least one interval which is not a terminal interval. For each terminal interval generated by the above procedure, we count the number of steps to get the interval and call it the height of the interval. Let us call the maximum of the numbers, $H(x)$, the height of the tree generated by the continuum cascade model on $[0, x]$.

When k points, $x-y_1, x-y_2, ..., x-y_k$ are generated at step 1, the probability, that the height is not larger than $n-1$, is $P_{n-1}(y_1)P_{n-1}(y_2)\cdots P_{n-1}(y_k)$, since each y_i is distributed uniformly at random on $[0, x]$ and k is distributed by the Poisson distribution. We have the recursion for the probability $P_n(x) \equiv \mathbf{P}(H(x) \leq n)$. For $n = 0$,

$$P_n(x) = e^{-x}, \tag{1}$$

while for $n \geq 1$,

$$P_n(x) \quad = \quad \exp\left[-x + \int_0^x P_{n-1}(y)\,dy)\right]. \tag{2}$$

We apply a theorem by E. Aidekon for branching random walk to study the above numerical traveling wave solution of equation (2) mathematically.

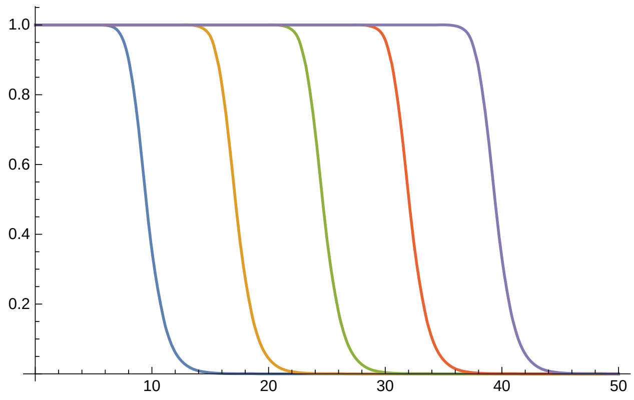

Figure 1: Traveling waves, the distribution $P_n(x)$ versus x obtained by iterating the recursion. $P_n(x)$ is shown for $n = 20, 40, 60, 80, 100$ (left to right).
.

We consider the derivative martingale D_n for our continuum cascade model. We know the martingale converges almost surely to some limit D_∞, which is strictly positive on the set of non extinction of the genealogical tree for our continuum cascade model. We see that there exists a constant $C^* > 0$ such that for any real x,

$$\lim_{n\to\infty} P_{n-1}(x + \frac{n}{e} + \frac{3}{2e}\ln n)) = \mathbf{E}[\exp(-C^* e^{ex} D_\infty)], \tag{3}$$

which gives the asymptotic probability on the longest chain length (on the position of wave front).

References

[1] Itoh, Y and Krapivsky , P L 2012. "Continuum cascade model of directed random graphs: traveling wave analysis." Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 45, 455002.

[2] Itoh, Y 2015 Continuum Cascade Model: Branching Random Walk for Traveling Wave. arXiv preprint arXiv:1507.04379.

Geometric structures of favorite points and late points of simple random walk and high points of Gaussian free field in two dimensions

岡田　いず海　(東京工業大学)

1　序

本講演では，$\mathbb{Z}^2$ 上の simple random walk(SRW) の特異点，又は対応する Gaussian free field(GFF) についての特異点に関する長時間挙動を扱う．ここでいう特異点とは，SRW については局所時間が他の点と比べて大きい又は小さい点の事であり，GFF についてはその点での値が他の点と比べて大きい点の事である．この研究の背景として，random walk の局所時間と GFF の関係性についての研究である Generalized second Ray Knight theorem が知られている．この定理の系として，局所時間に対して中心極限定理の意味での収束先が対応する GFF になることがわかる．この関係性を幾何学的構造の観点からさらに調べることで，局所時間が GFF に収束する挙動をより詳細に観察したい．また，$\mathbb{Z}^2$ 上の SRW の局所時間に関する極限定理を考える上で，局所時間に対する Large deviation の評価が重要になる場合がある．従って，その様な評価と密接に関係している「GFF や SRW の局所時間に関する特異点」の長時間挙動の性質に着目したい．具体的には，[7] で得られている $\mathbb{Z}^2$ 上の GFF の特異点の幾何学的性質に着目した．以下では，それを拡張した結果と，対応する SRW の局所時間に関する特異点の幾何学的構造を考察して得られた結果を紹介する．

2　定義と先行結果

$\mathbb{Z}_n^2 := \mathbb{Z}^2/n\mathbb{Z}^2$ とする．$\mathbb{Z}^2$ 又は $\mathbb{Z}_n^2$ 上の SRW を考える．これに対し，$K(n,x) := \sum_{m=0}^{n} 1_{\{S_m = x\}}$，$T_x := \inf\{m \geq 1 : S_m = x\}$，$\tau_n := \inf\{m \geq 1 : |S_m| \geq n\}$ と定義する．また，SRW と GFF に関する特異点を次の様に定義する．

(I) α-High points of GFF

covariance が $E^x[K(\tau_n, y)]$ であるような $\mathbb{Z}^2$ 上の GFF$\{\phi(x)\}_{x\in\mathbb{Z}^2}$ を考える．[1] の GFF の最大値に対する評価をふまえ，$0<\alpha<1$ に対し，$\mathbb{Z}^2$ 上の α-High points の集合を次のように定義する：

$$\mathcal{V}_n(\alpha) := \{x \in \mathbb{Z}^2 : \frac{1}{2}\phi(x)^2 \geq \frac{4\alpha}{\pi}(\log n)^2\}.$$

(II) α-Late points

[3] の $\mathbb{Z}_n^2$ 上の SRW の cover time に対する評価をふまえ，$0<\alpha<1$ に対し，$\mathbb{Z}_n^2$ 上の α-Late points の集合を次のように定義する：

$$\mathcal{L}_n(\alpha) := \{x \in \mathbb{Z}_n^2 : \frac{T_x}{(n\log n)^2} \geq \frac{4\alpha}{\pi}\}.$$

(III) α-Favorite points

[2] の局所時間の最大値に対する評価をふまえ，$0<\alpha<1$ に対し，$\mathbb{Z}^2$ 上の α-Favorite points の集合を次のように定義する：

$$\Psi_n(\alpha) := \{x : K(\tau_n, x) \geq \frac{4\alpha}{\pi}(\log n)^2\}.$$

上の (I)(II)(III) の幾何的構造を考えるために，$M \subset \mathbb{Z}^2$ と $0<\beta<1$ と $j \in \mathbb{N}$ に対して次の写像を定義する：

$$\mathcal{H}_{n,j,\beta}(M) := |\{(x_1, ..., x_j) \in M^j : d(x_i, x_l) \leq n^\beta \text{ for any } 1 \leq i, l \leq j\}|.$$

[7] では $\mathcal{H}_{n,2,\beta}(\mathcal{V}_n(\alpha))$ を評価しており，[4, 8] では $\mathcal{H}_{n,2,\beta}(\mathcal{L}_n(\alpha))$ に関して同じ評価を得ていた．これより GFF と局所時間の特異点が関係性をもっていることが推測できる．また，GFF の符号対称性により，GFF の値の大きい点と小さい点は同じ分布を持っている．従って，これらを組み合わせると「局所時間が小さい特異点」(Late points) の評価が「局所時間が大きい特異点」(Favorite points) にも現れることが期待できる．

3 主結果と先行結果との比較

High points of GFF，Late points，Favorite points の幾何的構造に関連性を示す評価が得られた．

定理 3.1. *(O. 2015)*
任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して次が成立する：$n \to \infty$ のとき，

$$(i)\frac{\log \mathcal{H}_{n,j,\beta}(\mathcal{V}_n(\alpha))}{\log n}, \frac{\log \mathcal{H}_{n,j,\beta}(\mathcal{L}_n(\alpha))}{\log n} \to \rho_j(\alpha,\beta) \text{ in probability かつ } \frac{\log \mathcal{H}_{n,j,\beta}(\Psi_n(\alpha))}{\log n} \to \rho_j(\alpha,\beta) \text{ a.s.}$$

$$(ii)\frac{\log E[\mathcal{H}_{n,j,\beta}(\mathcal{V}_n(\alpha))]}{\log n}, \frac{\log E[\mathcal{H}_{n,j,\beta}(\mathcal{L}_n(\alpha))]}{\log n}, \frac{\log E[\mathcal{H}_{n,j,\beta}(\Psi_n(\alpha))]}{\log n} \to \hat{\rho}_j(\alpha,\beta).$$

ここで，$\rho_j(\alpha,\beta)$ と $\hat{\rho}_j(\alpha,\beta)$ は次の様に定義する：

$$\rho_j(\alpha,\beta) := \begin{cases} 2+2(j-1)\beta - \frac{2j\alpha}{(1-\beta)(j-1)+1} & (\beta \le \frac{j}{j-1}(1-\sqrt{\alpha})) \\ 4j(1-\sqrt{\alpha}) - 2j(1-\sqrt{\alpha})^2/\beta & (\beta \ge \frac{j}{j-1}(1-\sqrt{\alpha})), \end{cases}$$

$$\hat{\rho}_j(\alpha,\beta) := \begin{cases} 2+2(j-1)\beta - \frac{2j\alpha}{(1-\beta)(j-1)+1} & (\beta \le 1 + \frac{1-\sqrt{j\alpha}}{j-1}) \\ 2(j+1-2\sqrt{j\alpha}) & (\beta \ge 1 + \frac{1-\sqrt{j\alpha}}{j-1}). \end{cases}$$

ただし，先行結果として，[7] では，$j=2$ の場合，すなわち，(i)$\frac{\log \mathcal{H}_{n,2,\beta}(\mathcal{V}_n(\alpha))}{\log n} \to \rho_2(\alpha,\beta)$(in probability) と (ii)$\frac{\log E[\mathcal{H}_{n,2,\beta}(\mathcal{V}_n(\alpha))]}{\log n} \to \hat{\rho}_2(\alpha,\beta)$ という評価，[4] では，(i)$\frac{\log \mathcal{H}_{n,2,\beta}(\mathcal{L}_n(\alpha))}{\log n} \to \rho_2(\alpha,\beta)$(in probability) という評価，また [8] では (ii)$\frac{\log E[\mathcal{H}_{n,2,\beta}(\mathcal{L}_n(\alpha))]}{\log n} \to \hat{\rho}_2(\alpha,\beta)$ という評価が得られている．さらに，[4] では，open problem として $\mathcal{L}_n(\alpha)$ を $\Psi_n(\alpha)$ に変えたときに同じ評価が得られることを予想しており，これが定理 3.1. より肯定的に解決できる．また，[5, 6] では任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathcal{H}_{n,j,\beta}(\mathcal{L}_n(\alpha))$ がどのような挙動になるか open problem として挙げており，これも同様に解決できる．

参考文献

[1] Bolthausen, E., Deushel, J.D. and Giacomin, G. (2001). Entropic repulsion and the maximum of the two-dimensional harmonic crystal. Ann. Probab. 29 1670—1692.

[2] Dembo,A., Peres,Y., Rosen,J. and Zeitouni,O. (2001). Thick points for planar Brownian motion and the Erdős-Taylor conjecture on random walk. Acta Math. 186, 239-270.

[3] Dembo, A., Peres, Y., Rosen, J. and Zeitouni, O. (2004). Cover times for Brownian motion and random walks in two dimensions. Ann. Math., 160, 433-464.

[4] Dembo,A., Peres,Y., Rosen,J. and Zeitouni,O. (2006). Late points for random walks in two dimensions. Ann. Probab., 34, No 1. 219-263.

[5] Dembo, A. (2005). Favorite points, cover times and fractals. In Lectures on Probability Theory and Statistics, volume 1869 of Lecture Notes in Math., pages 1—101. Springer, Berlin. Lectures from the 33rd Probability Summer School held in Saint-Flour, July 6—23, 2003

[6] Dembo, A. (2006). Simple random covering, disconnection, late and favorite points. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Volume III. 535-558.

[7] Daviaud, O. (2006). Extremes of the discrete two-dimensional Gaussian free field. Ann. Probab. 34, 962—986.

[8] Brummelhuis,M. and HilhorstI,H. (1991). Coverling of a finite lattice by a random walk. Phys. A, 176. 387-408.

局所時間の極大値：
対称な木の上の単純ランダムウォークの場合

阿部圭宏 (京都大学)

本講演では, 有限な b-ary tree 上で各葉への平均到達時刻よりもはるかに長い時間走らせた単純ランダムウォーク (SRW) を考え, その時刻における局所時間の極大値に関する結果を紹介する．この研究は, 極大値統計に関して「対数相関を持つ確率変数列」が独立同分布な確率変数列とは異なる新たなクラスを形成するだろう, という予想を検証する研究の一環である．分枝 Brown 運動, 分枝ランダムウォーク, 2 次元離散 Gauss 自由場などのモデルでは既にこの予想の妥当性を証明する研究が数多くなされている．

本研究の主結果を述べるために, 記号の準備をする．自然数 $b \geq 2$ を固定する．根を持つグラフ木でどの点も b 個の子供を持つものを b-ary tree と呼ぶ．T_i を b-ary tree の i 世代目の集合とする．深さ n の b-ary tree $T_{\leq n} := \cup_{i=0}^{n} T_i$ 上の連続時間 SRW $X = (X_t, t \geq 0, P_x, x \in T_{\leq n})$ を考える．SRW の各点における待ち時間は独立な期待値 1 の指数分布に従うものとする．この SRW の局所時間と逆局所時間を次で与える：

$$L_t^n(v) := \frac{1}{\deg(v)} \int_0^t 1_{\{X_s = v\}} ds, \quad v \in T_{\leq n},\ t \geq 0,$$

$$\tau(t) := \inf\{s \geq 0 : L_s^n(\rho) > t\}.$$

但し, ρ は $T_{\leq n}$ の根, $\deg(v)$ は点 v に隣り合う点の数とする．次に, 各点 $v \in T_k, k \geq 1$ にラベル $(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k)$ を次の (1), (2) を満たすように与える：(1) 各 i に対して $\overline{v}_i \in \{0, \ldots, b-1\}$, (2) ラベル $(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k, j), 0 \leq j \leq b-1$ を持つ点は v の子供．このラベルを使い, 各葉 $v \in T_n$ の「位置」を次で定義する：

$$\sigma(v) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{v}_i}{b^i}.$$

本講演では次の $[0,1] \times \mathbb{R}$ 上の点過程に着目する：$m < n$ と $t > 0$ に対して,

$$\Xi_{n,t}^{(m)} := \sum_{v \in T_{n-m}} \delta_{\left(\sigma\left(u_v^{(m)}\right),\ \max_{u \in T_m^v} \sqrt{L_{\tau(t)}^n(u)} - \sqrt{t} - a_n(t)\right)}. \tag{1}$$

但し, $\delta_{(x,h)}$ は点 $(x,h) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ における Dirac 測度, T_m^v は v を根とする部分木の m 世代目 ($T_m^v, v \in T_{n-m}$ は葉全体 T_n の分割であることに注意), $u_v^{(m)} \in T_m^v$ は局所時間が T_m^v の上で最大値をとる点, さらに $a_n(t)$ は次で与えられるものとする：

$$a_n(t) := \sqrt{\log b}\, n - \frac{3}{4\sqrt{\log b}} \log n - \frac{1}{4\sqrt{\log b}} \log\left(\frac{\sqrt{t} + n}{\sqrt{t}}\right). \tag{2}$$

局所時間の葉全体での最大値 $\max_{v \in T_n} \sqrt{L_{\tau(t)}^n(v)}$ の分布は値 $\sqrt{t} + a_n(t)$ に集中する (最大値から $\sqrt{t} + a_n(t)$ を差し引いたものが n に関する列として緊密である）ことを確かめることができる．点過程 (1) は葉全体を b^{n-m} 個の部分集合に分割し, 各部分の上で局所時間が最大値をとる葉の位置及びその極大値から「先端値」

を差し引いたものを情報として持つ．本講演では点過程 (1) の収束に関する結果を紹介する．その結果を述べる前に b-ary tree に付随する分枝ランダムウォークを定義する．$E(T)$ を b-ary tree T の辺集合, $(Y_e)_{e\in E(T)}$ を独立な標準正規分布に従う確率変数列とする．分枝ランダムウォーク $(h_v)_{v\in T_n}$ を次で定義する：

$$h_v = \sum_{i=1}^{n} Y_{e_i^v}, \quad v \in T_n.$$

但し, 各 $v \in T_n$ に対して, $e_1^v, \ldots, e_n^v$ は ρ から v までの道の辺とする．Derivative martingale $(D_n)_{n\geq 1}$ を次で定義する：

$$D_n := \sum_{v\in T_n} \left(\sqrt{\log b}\; n - \frac{1}{\sqrt{2}} h_v\right) e^{-2\sqrt{\log b}\left(\sqrt{\log b}\; n - \frac{1}{\sqrt{2}} h_v\right)}.$$

D_n は $n \to \infty$ のとき, ある確率変数 $D_\infty \in (0,\infty)$ に確率 1 で収束することが知られている．点過程 (1) は (m と t を適切にとることで) $n \to \infty$ のとき弱収束し, その極限が D_∞ で特徴付けられることがわかった：

定理 1　ある正定数 $c_1 > 0$ と全測度が D_∞ と同分布である $[0,1]$ 上のランダム Borel 測度 Z_∞ が存在して次が成り立つ：各 n に対して $t_n \geq c_1 n \log n$ かつ $\lim_{n\to\infty} \sqrt{t_n}/n =: \theta \in [0,\infty]$ なる任意の列 $(t_n)_{n\geq 1}$ と $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ かつ $\lim_{n\to\infty} r_n/n = 0$ なる任意の自然数列 $(r_n)_{n\geq 1}$ に対して, $n \to \infty$ のとき,

$\Xi_{n,t_n}^{(r_n)}$ は intensity measure $\alpha_*(\theta) Z_\infty(dx) \otimes 2\sqrt{\log b}\; e^{-2\sqrt{\log b}\; h} dh$ を持つ Cox 過程に弱収束する．

但し,

$$\alpha_*(\theta) := \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\theta+1}{\theta+\sqrt{\log b}}} \cdot \lim_{\ell\to\infty} \int_{\ell^{2/5}}^{\ell} z e^{2\sqrt{\log b} z} \mathbb{P}\left(\max_{v\in T_\ell} \frac{1}{\sqrt{2}} h_v > \sqrt{\log b}\; \ell + z\right) dz.$$

($\theta = \infty$ の場合, $\sqrt{\frac{\theta+1}{\theta+\sqrt{\log b}}} = 1$ とみなす.)

定理 1 に類似の結果は分枝 Brown 運動や 2 次元離散 Gauss 自由場でも知られており [1, 2], 定理 1 の設定では特に Bovier 氏と Hartung 氏の設定 [3] を参考にした．定理 1 の新しい点は, 点過程が非自明な極限を持つために局所時間の極大値から差し引く項 (2) が単純ランダムウォークを走らせる時間に依存することを明らかにした点である．時間の許す限り定理 1 の証明の概略にも触れたい．

参考文献

[1] L.-P. Arguin, A. Bovier, and N. Kistler. Poissonian statistics in the extremal process of branching Brownian motion. *Ann. Appl. Probab.* **22** (2012), 1693-1711.

[2] M. Biskup and O. Louidor. Extreme local extrema of two-dimensional discrete Gaussian free field. arXiv:1306.2602

[3] A. Bovier and L. Hartung. Extended convergence of the extremal process of branching Brownian motion. arXiv:1412.5975