A remark on the uniqueness of Silverstein extensions of symmetric Dirichlet forms

熊本大学大学院自然科学研究科　桑江一洋
岡山大学大学院自然科学研究科　塩沢裕一

Frank-Lenz-Wingert ([2]) は, 強局所型とは限らない正則 Dirichlet 形式に対して内在的距離を定義した．本講演では, この内在的距離を用いて正則 Dirichlet 形式の Silverstein 拡張の一意性が証明できることを注意する．

E を局所コンパクト可分距離空間とし, m を E 上の正値 Radon 測度で $\mathrm{supp}[m]=E$ を満たすものとする．$C(E)$ を E 上の連続関数全体の集合とし, $C_0(E)$ を E 上連続かつ台がコンパクトな関数全体の集合とする．$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(E;m)$ 上の正則 Dirichlet 形式とすれば, 任意の $u\in\mathcal{F}\cap C_0(E)$ に対して

$$\mathcal{E}(u,u)=\mathcal{E}^{(c)}(u,u)+\iint_{E\times E\setminus d}(u(x)-u(y))^2J(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)+\int_E u(x)^2\,\kappa(\mathrm{d}x)$$

を満たす強局所対称 2 次形式 $\mathcal{E}^{(c)}$, $E\times E\setminus d$ 上の正値対称 Radon 測度 $J(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$, E 上の正値 Radon 測度 κ の組が一意に定まる (Beurling-Deny 分解)．ただし, $d:=\{(x,x)\mid x\in E\}$. また, $u\in\mathcal{F}_b$ $(:=\mathcal{F}\cap L^\infty(E;m))$ に対して

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu_{\langle u\rangle}=2\mathcal{E}(uf,u)-\mathcal{E}(u^2,f),\quad f\in\mathcal{F}\cap C_0(E)$$

を満たす正値測度 $\mu_{\langle u\rangle}$ (エネルギー測度) が一意に存在する．ここで, $\mu^c_{\langle u\rangle}$ を $\mu_{\langle u\rangle}$ の局所部分とすれば, $u\in\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ に対して測度 $\mu^c_{\langle u\rangle}$ を自然に定義できることを注意する．ただし

$$\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}:=\{u:E\to\mathbb{R}\mid\forall G\subset E:\text{相対コンパクト},\ \exists u_G\in\mathcal{F}\text{ s.t. }u=u_G\ m\text{-a.e. on }G\}.$$

さらに各 $u\in\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ に対して, E 上の正値測度 $\mu^j_{\langle u\rangle}$ と $\mu^\kappa_{\langle u\rangle}$ をそれぞれ

$$\mu^j_{\langle u\rangle}(B):=2\iint_{B\times E\setminus d}(u(x)-u(y))^2\,J(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y),\quad \mu^\kappa_{\langle u\rangle}(B):=\int_B u(x)^2\,\kappa(\mathrm{d}x)$$

で定義する．このとき, $\mathcal{F}\subset L^2(E;m)$ より $\mu^\kappa_{\langle u\rangle}$ は Radon 測度になるが, $\mu^j_{\langle u\rangle}$ は必ずしも Radon 測度ではない．そこで, $\mathcal{F}^\dagger_{\mathrm{loc}}$ を次で定義する．

$$\mathcal{F}^\dagger_{\mathrm{loc}}:=\{u\in\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}\mid\mu^j_{\langle u\rangle}\text{ は Radon 測度である }\}.$$

定義. ([2]) E 上の擬距離 $\rho:E\times E\to[0,\infty]$ は, 以下の条件を満たすとき, $L^2(E;m)$ 上の正則 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の**内在的距離 (intrinsic metric)** であるという: $m_c+m_j\le m$ (すなわち, m_c+m_j は m に絶対連続かつ $\mathrm{d}(m_c+m_j)/\mathrm{d}m\le 1$ m-a.e.) を満たす 2 つの正値

Radon 測度 m_c と m_j が存在し, 任意の $A \subset E$ と $T > 0$ に対して関数 $\rho_A(x) := \inf_{y \in A} \rho(x,y)$ は以下の 3 条件を満たす.

(i) $\rho_A \wedge T \in \mathcal{F}^{\dagger}_{\mathrm{loc}} \cap C(E)$ (ii) $\mu^{j}_{\langle \rho_A \wedge T \rangle} \le m_j$ (iii) $\mu^{c}_{\langle \rho_A \wedge T \rangle} \le m_c$.

$L^2(E;m)$ 上の Dirichlet 形式 $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}})$ は,

$$\tilde{\mathcal{F}} \supset \mathcal{F}, \quad \tilde{\mathcal{E}}(u,u) = \mathcal{E}(u,u), \quad \forall u \in \mathcal{F}$$

を満たすとき, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の**拡張**であるという. $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の拡張全体を $\mathcal{A}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ としたとき,

$$\mathcal{A}_S(\mathcal{E},\mathcal{F}) := \left\{ (\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}}) \in \mathcal{A}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \mid u \cdot v \in \mathcal{F}_b,\ \forall u \in \mathcal{F}_b, \forall v \in \tilde{\mathcal{F}}_b \right\}$$

の要素を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の **Silverstein 拡張**という ([5], [6]).

$(\mathcal{E}^{\mathrm{ref}}, \mathcal{F}^{\mathrm{ref}})$ を**反射 Dirichlet 空間**とする ([1]). すなわち

$$\mathcal{F}^{\mathrm{ref}} := \left\{ u \in L^2(E;m) \mid u^{(n)} \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}, \forall n \ge 1 \text{ かつ } \sup_{n \ge 1} \mu^{c+j+\kappa}_{\langle u^{(n)} \rangle}(E) < \infty \right\}$$

$$\mathcal{E}^{\mathrm{ref}}(u,u) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \mu^{c+j+2\kappa}_{\langle u^{(n)} \rangle}(E), \quad u \in \mathcal{F}^{\mathrm{ref}}.$$

ただし, E 上の関数 u と自然数 n に対して $u^{(n)} := (-n) \vee u \wedge n$. また, Dirichlet 形式に対する半順序 $\prec$ を次で定める: Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}^1, \mathcal{F}^1)$ と $(\mathcal{E}^2, \mathcal{F}^2)$ に対して

$$(\mathcal{E}^1, \mathcal{F}^1) \prec (\mathcal{E}^2, \mathcal{F}^2) \underset{\text{定義}}{\iff} \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}^2 \quad \text{かつ} \quad \mathcal{E}^2(u,u) \le \mathcal{E}^1(u,u),\ \forall u \in \mathcal{F}^1.$$

すると, 反射 Dirichlet 空間 $(\mathcal{E}^{\mathrm{ref}}, \mathcal{F}^{\mathrm{ref}})$ は $(\mathcal{A}_S(\mathcal{E},\mathcal{F}), \prec)$ の最大元になる ([4, Theorem 5.1]).

仮定. $L^2(E;m)$ 上の正則 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の内在的距離は E 上の距離である. さらに, この距離に関する任意の開球は E の位相に関して相対コンパクトである.

定理. 仮定の下, 正則 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の Silverstein 拡張は一意に定まる. すなわち, $(\mathcal{E},\mathcal{F}) = (\mathcal{E}^{\mathrm{ref}}, \mathcal{F}^{\mathrm{ref}})$ が成立する.

注意. (i) Silverstein 拡張の一意性は, 強局所ディリクレ形式の場合は [3] で示されている.
(ii) [4, Theorem 6.1] において, 一般の準正則 Dirichlet 形式の Silverstein 拡張が一意になるための十分条件が与えられている. 今回の証明は, 正則な場合に限られているが, 内在的距離を用いた見通しの良いものである.
(iii) 保存的な Dirichlet 形式の Silverstein 拡張は一意に定まり ([4, Theorem 6.3]), 保存的ではない場合も一意性は成立し得る. 実際, そのような強局所 Dirichlet 形式の例は [3] で与えられている. ここで, 非局所 Dirichlet 形式についても同様な例が構成できることを注意する.

参考文献

[1] Z.-Q. Chen, *Probab. Theory Related Fields* **94** (1992), no. 2, 135–162.

[2] R.L. Frank, D. Lenz and D. Wingert, arXiv:1012.5050v1 [math.FA].

[3] T. Kawabata and M. Takeda, *Osaka J. Math.* **33** (1996), 881–893.

[4] K. Kuwae, *Potential Anal.* **16** (2002), no. 3, 221–247.

[5] M.L. Silverstein, *Illinois Jour. Math.* **18** (1974), 310–355.

[6] M.L. Silverstein, Lecture Notes in Math., **426**, 1974, Springer.