Compactness of semigroups generated by symmetric non-local Dirichlet forms with unbounded coefficients

塩沢 裕一　(大阪大学)[*1]
Jian Wang　(Fujian Normal University)

非有界係数をもつ非局所型ディリクレ形式から生成されるマルコフ半群が (非) コンパクトになるための条件を与える. $J(x,\mathrm{d}y)$ を $\mathbb{R}^d\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上の非負積分核とする. 測度 $J(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y):=J(x,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$ について, 対称性 $(J(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=J(\mathrm{d}y,\mathrm{d}x))$ および次の可積分条件を仮定する:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(1\wedge|x-y|^2\right)\,J(x,\mathrm{d}y)<\infty.$$

すなわち, $J(x,\mathrm{d}y)$ はある対称レビ型過程の飛躍核となる. $W(x,y)$ は $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上の対称なボレル可測関数であって, 非負かつ局所有界で次の条件をみたすものとする:

$$x\mapsto\int_{\mathbb{R}^d}\left(1\wedge|x-y|^2\right)W(x,y)\,J(x,\mathrm{d}y)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d). \tag{1}$$

$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の二次形式 $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ を以下で定義する:

$$\mathcal{D}(\mathcal{E})=\left\{u\in L^2(\mathbb{R}^d)\mid\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}(u(x)-u(y))^2W(x,y)\,J(x,\mathrm{d}y)\mathrm{d}x<\infty\right\},$$
$$\mathcal{E}(u,v)=\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))W(x,y)J(x,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x\quad(u,v\in\mathcal{D}(\mathcal{E})).$$

条件 (1) より $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\subset\mathcal{D}(\mathcal{E})$ が成立する. 特に $(\mathcal{E},C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ は $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ 内で可閉であって, その閉包 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の正則ディリクレ形式となる.

$W(x,y)$ は重み関数の役割を果たす. 特に $W(x,y)$ の大きさに応じて, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ から生成される ($L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の) マルコフ半群 $(P_t)_{t\geq0}$ のコンパクト性が変化する. $W(x,y)$ が小さいとき, $(P_t)_{t\geq0}$ は非コンパクトである:

定理 1. $(P_t)_{t\geq0}$ が非コンパクトであるための十分条件は

$$\liminf_{l\to\infty}\left[l^{-d}\int_{|x|\leq l}\left\{\int_{\mathbb{R}^d}\left(1\wedge\frac{|x-y|^2}{l^2}\right)W(x,y)J(x,\mathrm{d}y)\right\}\mathrm{d}x\right]<\infty.$$

次に $(P_t)_{t\geq0}$ がコンパクトであるための十分条件を紹介する.

仮定 2.　(i) 任意の正数 λ に対して, $\mathbb{R}^d$ 上の C^1 関数 V_λ と正定数 R_0 が存在して

- $W(x,y)\geq V_\lambda(x)+V_\lambda(y)$ $(x,y\in\mathbb{R}^d,\ |x-y|<1)$;
- $\inf_{x\in\mathbb{R}^d}V_\lambda(x)>0$ かつ $V_\lambda(x)=\lambda(1+|x|^2)$ $(x\in\mathbb{R}^d,\ |x|\geq R_0)$.

(ii) $[0,1)$ 上のボレル測度 $\nu(\mathrm{d}z)$ が存在して

- 任意の $x\in\mathbb{R}^d$ と $A\subset B(0,1)$ に対して $J(x,x+A)\geq\nu(A)$ および $\nu(A)=\nu(-A)$;

本研究は科研費 (課題番号:JP17K05299) の助成を受けたものである。
[*1] 〒560-0043　大阪府豊中市待兼山町 1 - 1　大阪大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail: shiozawa@math.sci.osaka-u.ac.jp

- $\varphi(\xi) := \int_{|z|<1}(1-\cos\langle z,\xi\rangle)\,\nu(\mathrm{d}z)$ $(\xi \in \mathbb{R}^d)$, $\beta_0(r) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-r\varphi(\xi)}\,\mathrm{d}\xi$ $(r>0)$ とおくと
$$\beta_0(r) < \infty, \quad \int_r^\infty \frac{\beta_0^{-1}(s)}{s}\,\mathrm{d}s < \infty \quad (r>0).$$
ただし, $\beta_0^{-1}(r)$ は $\beta_0(r)$ の逆関数である.

仮定 2 (i) は, $|x-y|<1$ のとき $W(x,y)$ が関数 $(1+|x|^2)+(1+|y|^2)$ よりもオーダーの意味で真に大きいことを表す. 仮定 2 (ii) は, 飛躍核が (対称) レビ過程のように空間一様な場合と比較できることを意味する. ν はある対称レビ過程 Z のレビ測度となり, φ は特性関数となる. 特に Z の分布は密度関数をもち ([1, Proposition 4.1]), マルコフ半群の超縮小性と関数不等式との関係 ([2, Theorems 3.3.14, 3.3.15]) より, 各 P_t もルベーグ測度に関して密度関数をもつことが分かる.

定理 3. 仮定 2 のもと, $(P_t)_{t\geq 0}$ はコンパクトである.

定理 1, 3 の証明では, 次の 2 つの主張の間の関係を用いる:

(a) $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の生成作用素の本質的スペクトルが空 ($\Leftrightarrow$ $(P_t)_{t\geq 0}$ がコンパクト).

(b) (超ポアンカレ不等式) 任意の正値関数 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して, ある単調非増加関数 $\beta:(0,\infty)\to(0,\infty)$ が存在して
$$\int_{\mathbb{R}^d} u^2\,\mathrm{d}x \leq r\mathcal{E}(u,u) + \beta(r)\left(\int_{\mathbb{R}^d}|u|\psi\,\mathrm{d}x\right)^2 \;(r>0,\; u\in\mathcal{F}). \tag{2}$$

[2, Theorem 3.2.1] より (a)$\Rightarrow$(b) が従う. 定理 1 の証明では, $(P_t)_{t\geq 0}$ がコンパクトであることを仮定して, (2) から矛盾を導く. 仮定 2 のもとでは (b)$\Rightarrow$(a) も従うことに注意して, 定理 3 の証明では実際に (2) を示す.

例 4. $J(x,\mathrm{d}y) = c_\alpha |x-y|^{-(d+\alpha)}\,\mathrm{d}y$ を指数 $\alpha \in (0,2)$ の対称安定過程の飛躍核とする. ここでは重み関数 $W(x,y)$ として次のものをとる:
$$W(x,y) = (U_1(x)+U_1(y))\mathbf{1}_{\{|x-y|<1\}} + (U_2(x)+U_2(y))\mathbf{1}_{\{|x-y|\geq 1\}}.$$
ただし, U_i $(i=1,2)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の局所有限な非負値ボレル可測関数であって, ある $c>0$ と $q\in[0,\alpha)$ に対して $U_2(x)\leq c(1+|x|)^q$. このとき定理 1, 3 より次のことが分かる:

(i) $\inf_{x\in\mathbb{R}^d} U_1(x) > 0$ かつ $\liminf_{|x|\to\infty} U_1(x)/|x|^2 = \infty \Rightarrow (P_t)_{t\geq 0}$ はコンパクト.

(ii) $\limsup_{|x|\to\infty} U_1(x)/|x|^2 < \infty \Rightarrow (P_t)_{t\geq 0}$ は非コンパクト.

より具体的に, $p\in[0,\infty)$, $q\in[0,\alpha)$ を固定して, 重み関数 $W(x,y)$ を次で与える:
$$W(x,y) = \begin{cases}(1+|x|)^p + (1+|y|)^p & (|x-y|<1),\\ (1+|x|)^q + (1+|y|)^q & (|x-y|\geq 1).\end{cases}$$
(i) (ii) より, $(P_t)_{t\geq 0}$ がコンパクトであるための必要十分条件は $p>2$ である. $q<\alpha$ という制限は条件 (1) によるものであり, マルコフ半群のコンパクト性とは無関係である.

参考文献

[1] V. Knopova and R. L. Schilling, *Forum Math.* **25** (2013), 125–149.

[2] F.-Y. Wang, *Functional Inequalities, Markov Semigroups and Spectral Theory*, Science Press, Beijing–New York, 2005.