対称マルコフ過程の大域的性質とディリクレ形式

塩沢 裕一　(岡山大学)*

1. 序

本講演では, 正則ディリクレ形式から生成される対称マルコフ過程について, 大域的性質の定量化に関するこれまでの研究成果を概観する. さらに, 筆者の試み ([48, 49, 50]) および X. Huang 氏との共同研究 ([28]) について紹介したい. また, 可能ならば最近の進展についても触れたい.

まず初めに, 最も基本的な確率過程の 1 つであるブラウン運動について, 保存性・過度性の定量化に関する古典的な結果を述べる. 原点から出発する d 次元ブラウン運動 $(\{B_t\}_{t\geq 0}, P)$ に対して, Kolmogorov の判定法 (例えば [33, 4.12] を参照せよ) により, すべての十分大きな t に関する $|B_t|$ の上界を決定できる. すなわち, $(0,\infty)$ 上の単調増加な正値関数 $g(t)$ が $g(t)\to\infty\ \ (t\to\infty)$ を満たすとき,

$$\int_{\cdot}^{\infty} g(t)^d \exp\left(-\frac{g(t)^2}{2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} \text{ が収束する (resp. 発散する)}$$

ならば

$$P\Big(\text{ある } T>0 \text{ が存在して, すべての } t\geq T \text{ に対して } |B_t|\leq \sqrt{t}g(t)\Big)=1 \quad (\text{resp. } 0). \tag{1.1}$$

等式 (1.1) の左辺の確率が 1 になるとき, 関数 $\sqrt{t}g(t)$ をブラウン運動の **upper rate function** という. 例えば関数 $R(t)=\sqrt{(2+\varepsilon)t\log\log t}$ (ただし, $\varepsilon>-2$) は, $\varepsilon>0$ のときのみ upper rate function となる. さらに $d\geq 3$ のときは, Dvoretzky-Erdös の判定法 ([10], [33, 4.12]) により, すべての十分大きな t に関する $|B_t|$ の下界も決定できる. すなわち, $(0,\infty)$ 上の単調減少な正値関数 $h(t)$ が $h(t)\to 0$ $(t\to\infty)$ を満たすとき,

$$\int_{\cdot}^{\infty} h(t)^{d-2}\frac{\mathrm{d}t}{t} \text{ が収束する (resp. 発散する)}$$

ならば

$$P\Big(\text{ある } T>0 \text{ が存在して, すべての } t\geq T \text{ に対して } |B_t|\geq \sqrt{t}h(t)\Big)=1 \quad (\text{resp. } 0). \tag{1.2}$$

等式 (1.2) の左辺の確率が 1 になるとき, 関数 $\sqrt{t}h(t)$ をブラウン運動の **lower rate function** という. 例えば任意の正数 c に対して, 関数 $r(t)=c\sqrt{t}/(\log t)^{(1+\varepsilon)/(d-2)}$ (ただし $\varepsilon>-1$) は, $\varepsilon>0$ のときのみ lower rate function となる.

Kolmogorov および Dvoretzky-Erdös の判定法は, それぞれ Khintchine [35] および竹内 [55] により, 指数 $\alpha\in(0,2)$ の d 次元対称安定過程へと拡張された. また, (対称とは限らない) 安定過程の直積についても, Hendricks [24] や Khoshnevisan [36] により, rate function に関する判定法が得られている. 一方で市原 [29] は, 係数が滑らかな一

本研究は科研費 (課題番号:23740078, 26400135) の助成を受けたものである.
* 〒 700-8530 岡山市北区津島中 3-1-1 岡山大学大学院自然科学研究科／環境理工学部環境数理学科
e-mail: shiozawa@ems.okayama-u.ac.jp
web: http://www.ems.okayama-u.ac.jp/appl/shiozawa/

様楕円型作用素を生成作用素に持つ $\mathbb{R}^d$ 上の対称拡散過程に対して, 推移確率の評価やマルチンゲール理論を用いて Dvoretzky-Erdös の判定法を拡張した.

以上で述べた結果の自然な拡張として, 正則ディリクレ形式から生成される対称マルコフ過程の upper/lower rate function が, ディリクレ形式の解析的な情報からどのように定まるのかという問題を考えたい. ディリクレ形式は様々な特異性 (例えば係数の不連続性や空間の特異性) に強く, 確率過程の構成・解析を行う上で重要な役割を果たしている. しかし, ディリクレ形式の具体形と対称マルコフ過程の経路の性質との関係は一般に非自明であり, この点を明らかにすることが講演者の研究目的である.

リーマン多様体上のブラウン運動や対称拡散過程については, 体積増大度や係数増大度に関する保存性の成立条件 (例えば [9, 16, 17, 18, 30, 43, 52, 53, 54] を参照せよ) および upper/lower rate function (例えば [19, 20, 23, 25, 45] を参照せよ) について詳しく調べられている. 近年では飛躍を持つ対称マルコフ過程についても, 体積増大度や係数増大度に関する保存性の成立条件が調べられている ([11, 22, 27, 38, 39, 48, 51]). 特に重み付きグラフ上のマルコフ連鎖に対しては, 1 回の移動で隣接点のみに動く性質を用いて, 対称拡散過程と同様の保存性の成立条件が与えられた ([11, 27]). さらに X. Huang ([26]) および X. Huang と筆者 ([28]) は, リーマン多様体上のブラウン運動の [19, 20, 25] の結果を重み付きグラフ上のマルコフ連鎖に拡張した. 以上の研究の流れを踏まえて筆者は, 飛躍を持つ対称マルコフ過程の upper/lower rate function に興味を持ち, 体積増大度や係数増大度に関する特徴づけを得た ([49, 50]).

次章以降の概要は以下の通りである. 2 章では, ディリクレ形式と対称マルコフ過程に関する基本概念を述べる. 3 章では, 飛躍を持つ対称マルコフ過程の保存性判定に関する結果 ([48]) を述べる. この応用として, 有界領域上のある飛躍型マルコフ過程に対して, 係数の退化度による保存性の成立条件を与える. また特別な場合には, 保存性成立の必要十分条件が得られることを述べる. 4 章では, 対称マルコフ過程の upper rate function に関する結果を紹介する. 4.1 節では重み付きグラフ上のマルコフ連鎖に対する upper rate function の特徴づけを [28] に沿って述べる. 4.2 節では, 一般の内部消滅を持たない対称マルコフ過程に対する upper rate function の特徴づけに関する結果 ([49]) を述べる. この応用として, 係数が退化する飛躍型マルコフ過程に対して, 粒子の広がり方が遅くなることを定量的に捕えた例を紹介する. 5 章では, 対称マルコフ過程の lower rate function に関する結果とその応用 ([50]) を述べる.

2. 準備

本章では [14, 15] に従って, ディリクレ形式と対称マルコフ過程に関する基本概念を述べる. (X,d) を局所コンパクト可分距離空間とし, m を X 上の正値ラドン測度で $\mathrm{supp}[m]=X$ を満たすものとする. $C(X)$ を X 上の連続関数全体の集合とし, $C_0(X)$ を X 上の連続関数でコンパクトな台を持つもの全体の集合とする. $\mathcal{F}$ を $L^2(X;m)$ の稠密な線形部分空間とし, $\mathcal{E}$ を $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ 上で定義された対称双線形形式とする. $L^2(X;m)$ 上の対称双線形形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が**ディリクレ形式**であるとは, 次の三条件が成立することである:

(i) (非負性) 任意の $u\in\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{E}(u,u)\geq 0$.

(ii) (閉形式) $\mathcal{F}$ は $\mathcal{E}_1(u,v)$ を内積とする実ヒルベルト空間である. ただし, $(u,v)_{L^2}$ は m に関する L^2 内積であり, $\mathcal{E}_1(u,v)=\mathcal{E}(u,v)+(u,v)_{L^2}$.

(iii) (マルコフ性) 任意の $u \in \mathcal{F}$ に対して $v = 0 \vee u \wedge 1 \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(v,v) \le \mathcal{E}(u,u)$.

ディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対して, $L^2(X;m)$ 上の非正定値自己共役作用素 A が等式

$$\mathcal{F} = \mathcal{D}\left(\sqrt{-A}\right), \quad \mathcal{E}(u,v) = \left(\sqrt{-A}u, \sqrt{-A}v\right)_{L^2}, \quad u,v \in \mathcal{F}$$

で定まり, A (または $(\mathcal{E},\mathcal{F})$) の生成する半群 $T_t = e^{tA}$ は**マルコフ半群**となる. すなわち, 関数 $f \in L^2(X;m)$ に対して $0 \le f \le 1$, m-a.e. ならば $0 \le T_t f \le 1$, m-a.e.

以下ではディリクレ形式の保存性と再帰性, 過度性の定義を述べる. ディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ から生成される半群 $\{T_t\}_{t\ge 0}$ は $L^\infty(X;m)$ 上に拡張できる (例えば [14, p.56] を参照せよ). この拡張した半群も同じ記号で表すことにする. $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が**保存的**であるとは, 任意の $t>0$ に対して $T_t 1 = 1, m$-a.e. が成立することである. また, 積分

$$S_t f = \int_0^t T_s f \, \mathrm{d}s, \quad f \in L^2(X;m)$$

がリーマン和の $L^2(X;m)$ 内での強収束極限として確定する. S_t は $L^2(X;m)$ 上の有界対称作用素となり, さらに $L^1(X;m) \cap L^2(X;m)$ 上の作用素 T_t と S_t をそれぞれ $L^1(X;m)$ 上の有界線形作用素へと一意に拡張できる. これらの拡張した作用素も同じ記号で表すことにする. $L^1_+(X;m) = \{u \in L^1(X;m) \mid u \ge 0, m\text{-a.e.}\}$ として

$$Gf = \lim_{N\to\infty} S_N f, \quad f \in L^1_+(X;m)$$

とおく. $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が**再帰的**であるとは, 任意の $f \in L^1_+(X;m)$ に対して

$$Gf = 0 \text{ または } \infty, \quad m\text{-a.e.}$$

が成立することである. $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が**過度的**であるとは, $m(\{x \in X \mid f(x) = 0\}) = 0$ なる関数 $f \in L^1_+(X;m)$ が存在して $Gf < \infty$ m-a.e. を満たすことである.

m 可測な集合 $A \subset X$ が (T_t) **不変**であるとは, 任意の $f \in L^2(X;m)$ と $t>0$ に対して $T_t(f\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_A T_t f$, m-a.e. が成立することである. $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が**既約**であるとは, 任意の不変集合 $A \subset X$ は $m(A) = 0$ または $m(X \setminus A) = 0$ となることである. ディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は, 既約ならば再帰的または過度的のいずれかである ([14, Lemma 1.6.4]).

$\mathcal{O}$ を X の開集合族とする. $A \in \mathcal{O}$ に対して

$$\mathrm{Cap}(A) = \begin{cases} \inf_{u\in\mathcal{L}_A} \mathcal{E}_1(u,u), & \mathcal{L}_A \ne \emptyset \\ \infty, & \mathcal{L}_A \ne \emptyset \end{cases}$$

と定める. ただし $\mathcal{L}_A = \{u \in \mathcal{F} \mid u \ge 1 \ \ m\text{-a.e. on } A\}$. 任意の $A \subset X$ に対して, A の**容量**を

$$\mathrm{Cap}(A) = \inf_{B\in\mathcal{O},\, A\subset B} \mathrm{Cap}(B)$$

で定める. $A \subset X$ について, $x \in A$ に関する主張が A 上で **q.e.** ("quasi everywhere" の省略形) に成立するとは, ある容量零集合 $N \subset A$ が存在して, 各 $x \in A \setminus N$ に対して主張が成立することである.

さて, ディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が**正則**であるとは, $\mathcal{F} \cap C_0(X)$ がノルム $\|u\|_{\mathcal{E}_1} = \sqrt{\mathcal{E}_1(u,u)}$ に関して $\mathcal{F}$ に稠密であり, 一様ノルム $\|\cdot\|_\infty$ に関して $C_0(X)$ に稠密である

ことをいう．正則ディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対して, Beurling-Deny の公式 ([14, Theorem 3.2.1, Lemma 4.5.4]) と呼ばれる次の表現公式が成立する: 任意の $u,v\in\mathcal{F}\cap C_0(X)$ に対して

$$\mathcal{E}(u,v)=\mathcal{E}^{(c)}(u,v)+\iint_{X\times X\setminus\mathrm{diag}}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))\,J(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)+\int_X u(x)v(x)\,k(\mathrm{d}x).$$

ただし, $\mathrm{diag}=\{(x,y)\in X\times X\mid x=y\}$ とし,

- $(\mathcal{E}^{(c)},\mathcal{F}\cap C_0(X))$ は強局所的対称形式である．すなわち, $\mathrm{supp}[u]$ の近傍で v が定数ならば $\mathcal{E}^{(c)}(u,v)=0$;
- J は $X\times X\setminus\mathrm{diag}$ 上の対称な正値 Radon 測度;
- k は X 上の正値 Radon 測度.

特に, 以上の 3 要素は正則ディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対して一意に定まる．測度 J と k をそれぞれ $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に付随する**飛躍測度**および**消滅測度**と呼ぶ.

強局所形式 $\mathcal{E}^{(c)}$ は $\mathcal{F}$ 上に一意的に拡張できる．さらに任意の $u\in\mathcal{F}$ に対して, X 上の正値 Radon 測度 $\mu^c_{\langle u\rangle}$ が存在して

$$\mathcal{E}^{(c)}(u,u)=\frac{1}{2}\mu^c_{\langle u\rangle}(X)$$

([14, p.123])．測度 $\mu^c_{\langle u\rangle}$ を u の**エネルギー測度の局所部分**という．また $u,v\in\mathcal{F}$ に対して, 符号付き測度 $\mu^c_{\langle u,v\rangle}$ を次で定める:

$$\mu^c_{\langle u,v\rangle}=\frac{1}{2}\left(\mu^c_{\langle u+v\rangle}-\mu^c_{\langle u\rangle}-\mu^c_{\langle v\rangle}\right).$$

正則ディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対して, (m) 対称ハント過程 $\mathbf{M}=(\{X_t\}_{t\geq 0},\{P_x\}_{x\in X})$ が存在して

$$T_tf(x)=E_x[f(X_t)],\quad m\text{-a.e.},\quad f\in L^2(X;m)\cap\mathcal{B}_b(X)$$

([13], [14, Chapter 7])．ここで $\mathcal{B}_b(X)$ は X 上の有界な Borel 可測関数全体の集合であり, ハント過程とは大まかに言って右連続かつ準左連続性をもつ強マルコフ過程のことである (正確な定義は [14, A.2] や [15, 1.4] を参照せよ)．特に Beurling-Deny 公式で現れる $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の飛躍測度と消滅測度は, それぞれ $\mathbf{M}$ の飛躍と内部消滅の起こり方を記述する ([14, 4.5])．一方で, 対称ハント過程 $\mathbf{M}$ が与えられた場合, 推移半群 $p_tf(x)=E_x[f(X_t)]$ を $L^2(X;m)$ 上に拡張することで (正則とは限らないが) ディリクレ形式を構成できる.

$X_\Delta=X\cup\{\Delta\}$ を X の一点コンパクト化とするとき, $\zeta=\inf\{t>0\mid X_t\in\Delta\}$ を $\mathbf{M}$ の**生存時間**という．[14, Exercise 4.5.1] により, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が保存的であるための必要十分条件は, $\mathbf{M}$ が保存的であること, すなわち $P_x(\zeta=\infty)=1,$ q.e. $x\in X$.

$B\subset X$ が**概 Borel 可測**であるとは, X_Δ 上の任意の確率測度 μ に対して $B_1,B_2\in\mathcal{B}(X_\Delta)$ が存在して, $B_1\subset B\subset B_2$ かつ P_μ(ある $t\geq 0$ に対して $X_t\in B_2\setminus B_1)=0$ となることである．ただし $\mathcal{B}(X_\Delta)=\mathcal{B}(X)\cup\{B\cup\{\Delta\}:B\in\mathcal{B}(X)\}$. $N\subset X$ が**適切除**

外集合であるとは, N が概ボレル可測かつ $m(N)=0$ であり, $X\setminus N$ が $\mathbf{M}$ 不変となること, すなわち

$$P_x\,(\text{任意の } t>0 \text{ に対して } X_t\in(X\setminus N)_\Delta \text{ かつ } X_{t-}\in(X\setminus N)_\Delta)=1,\quad x\in X\setminus N$$

が成立することである. ここで $(X\setminus N)_\Delta=(X\setminus N)\cup\{\Delta\}$, $X_{t-}=\lim_{s\uparrow t}X_s$. なお, 任意の適切除外集合 N に対して $\mathrm{Cap}(N)=0$ ([14, Theorem 4.2.1]).

3. 保存性

本章では, 正則ディリクレ形式から生成される対称ハント過程が保存的であるための十分条件を与える. $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を正則ディリクレ形式とし, $\mathbf{M}=(\{X_t\}_{t\geq 0},\{P_x\}_{x\in X})$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ から生成される対称ハント過程とする.

仮定 3.1. 正則ディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の消滅測度 k と飛躍測度 J について次の条件を課す:

(i) $k=0$.

(ii) 積分核 $J(x,\mathrm{d}y)$ が存在して $J(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=J(x,\mathrm{d}y)\,m(\mathrm{d}x)$.

この仮定の下では, 関数 $u,v\in\mathcal{F}$ に対して

$$\mathcal{E}(u,u)=\frac{1}{2}\mu^c_{\langle u,v\rangle}(X)+\iint_{X\times X\setminus\mathrm{diag}}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))\,J(x,\mathrm{d}y)m(\mathrm{d}x).$$

特に消滅測度が現れないので, $\mathbf{M}$ は内部消滅を起こさない.

飛躍を持つディリクレ形式を解析する手段の一つとして, 飛躍を大きい部分と小さい部分に分けて, 飛躍の大きい部分を摂動と見なす方法がある: 適当な $X\times X\setminus\mathrm{diag}$ 上の正値対称関数 $F(x,y)$ を用いて $\mathcal{E}^{(1)}$ と $\mathcal{E}^{(2)}$ を

$$\mathcal{E}^{(1)}(u,v)=\frac{1}{2}\mu^c_{\langle u,v\rangle}(X)+\iint_{0<d(x,y)<F(x,y)}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))\,J(x,\mathrm{d}y)m(\mathrm{d}x),$$
$$\mathcal{E}^{(2)}(u,v)=\int_X\left(\int_{d(x,y)\geq F(x,y)}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))\,J(x,\mathrm{d}y)\right)m(\mathrm{d}x)$$

と定める. もし

$$M=\sup_{x\in X}\int_{d(x,y)\geq F(x,y)}J(x,\mathrm{d}y)<\infty \tag{3.1}$$

ならば, 測度 $J(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=J(x,\mathrm{d}y)m(\mathrm{d}x)$ の対称性より

$$0\leq\mathcal{E}^{(2)}(u,u)\leq 4M\|u\|^2_{L^2(X;m)},\quad u\in\mathcal{F}$$

なので

$$\mathcal{E}^{(1)}_1(u,u)\leq\mathcal{E}_1(u,u)\leq\mathcal{E}^{(1)}_{4M+1}(u,u),\quad u\in\mathcal{F}.$$

よって $(\mathcal{E}^{(1)},\mathcal{F})$ も正則ディリクレ形式である. さらに, [22, Theorem 2.2] と同様に次の補題が従う:

補題 3.2. $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が保存的であることは, $(\mathcal{E}^{(1)},\mathcal{F})$ が保存的であることと同値である.

注意 3.3. $(\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{F})$ から生成される対称ハント過程より, 池田・長澤・渡辺 [31] による piecing out の方法, もしくは Meyer の方法 [40] を用いて, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を生成する対称ハント過程が構成できる. この応用については, 例えば [1, 2, 3, 8] を参照せよ.

補題 3.2 より, $(\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{F})$ の保存性から $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の保存性が従う. さて, $(\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{F})$ は小さな飛躍に対応するので, いわゆる Davies の方法 ([9, 16]) を適用して保存性の十分条件を導出できる. 実際, 正宗・上村 [38], Grigor'yan-Huang-正宗 [22] は, $F(x,y) \equiv 1$ として, 体積増大度に関する保存性の十分条件を導出した. 正宗-上村-J. Wang [39] は, $F(x,y)$ として適切な正定数を取ることで先に述べた結果を改良した. 一方, 上村氏との共同研究 [51] では状態空間を $\mathbb{R}^d$ 全体の場合に制限して, 係数増大度に関する保存性の十分条件を与えた ([47, 56] も参照せよ). 具体的には, 生成作用素の具体的表現を求め, 生成作用素に関する磯崎・上村 ([32, Lemma 3.2]) の保存性判定法を用いた. この証明では, 飛躍の大きさをある関数で区別し, 小さい飛躍に関する (非有界) 係数を処理するために, 長さを測る適当な関数を用いた.

[48] では一般に関数 $F(x,y)$ で飛躍の大きさを区別し, それに応じて長さを測る関数を取ることで, [51] の結果を一般の正則ディリクレ形式に拡張し, [22, 38, 39] の結果を一般化した. 対称拡散過程に対しては, ディリクレ形式に応じて長さを (例えば内在的距離を用いて) 取り換える手法は標準的であり, 例えば保存性判定に用いられた ([9, 52, 53]).

以下では [48] の結果を述べる. まず [53] に従い, 長さを測る関数のクラス $\mathcal{A}$ を導入する. X 上の関数 u が**局所的に $\mathcal{F}$ に属する** ($u \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ とかく) とは, 任意の相対コンパクトな開集合 $G \subset X$ に対して $u_G \in \mathcal{F}$ が存在して, $u = u_G$ m-a.e. on G が成立することである. また

$$\mathcal{F}_{\mathrm{loc,\,ac}} = \left\{\rho \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \cap C(X) \mid \mu^c_{\langle\rho\rangle} \text{ は } m \text{ に絶対連続}\right\}$$

とし,

$$\mathcal{A} = \left\{\rho \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc,\,ac}} \mid \lim_{x \to \Delta} \rho(x) = \infty \text{ かつ各 } r > 0 \text{ に対して } K_\rho(r) \text{ はコンパクト}\right\} \tag{3.2}$$

とおく. ただし, 各 $r > 0$ に対して $K_\rho(r) = \{x \in X \mid \rho(x) \le r\}$.

以後, $\mathcal{A}$ は空集合ではないことを仮定し, $\rho \in \mathcal{A}$ を固定する. $\mathcal{A}$ の定義より

$$\{\zeta = \infty\} = \{\text{任意の } t > 0 \text{ に対して } \rho(X_t) < \infty\}$$

なので, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ (または $\mathbf{M}$) が保存的であることは以下と同値である:

$$P_x\left(\text{任意の } t > 0 \text{ に対して } \rho(X_t) < \infty\right) = 1, \quad \text{q.e. } x \in X.$$

仮定 3.4. $X \times X \setminus \mathrm{diag}$ 上の正値関数 $F(x,y)$ と関数 $\rho \in \mathcal{A}$ の組が存在して次を満たす:

(i) 任意の $(x,y) \in X \times X \setminus \mathrm{diag}$ に対して $F(x,y) = F(y,x)$ かつ

$$\sup_{x \in X} \int_{d(x,y) \ge F(x,y)} J(x, \mathrm{d}y) < \infty.$$

(ii)　$d(x,y) < F(x,y)$ を満たす任意の $(x,y) \in X \times X \setminus \mathrm{diag}$ に対して

$$|\rho(x) - \rho(y)| < 1.$$

仮定 3.4 を満たす関数 F と $\rho \in \mathcal{A}$ の組を固定する. 測度 m に関する $\mu^c_{\langle \rho \rangle}$ の密度関数を $\Gamma^c(\rho)$ とおき, X 上の関数 $\Gamma^j(\rho)$ を

$$\Gamma^j(\rho)(x) = \int_{0<d(x,y)<F(x,y)} (\rho(x) - \rho(y))^2 \, J(x, \mathrm{d}y), \quad x \in X$$

と定める. 各 $r > 0$ に対して

$$M_\rho(r) = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in K_\rho(r)} \Gamma^c(\rho)(x) + \operatorname*{ess\,sup}_{x \in K_\rho(r)} \Gamma^j(\rho)(x)$$

とおき, 数列 $\{p_n\}$ を以下で定める:

$$p_n = 2 \cdot \sup_{\substack{\frac{n}{2} - 1 \le \rho(x) \le n+1, \\ 0 < d(x,y) < F(x,y)}} |\rho(x) - \rho(y)|.$$

定理 3.5. ([48, Theorem 2.5])　仮定 3.4 の下, もし数列 $\{a_n\}$ と $T > 0$ が存在して

$$\liminf_{n \to \infty} M_\rho(n+3) \cdot m(K_\rho(n+3)) \exp\left(-na_n + a_n^2 e^{a_n p_n} M_\rho(n+1)T\right) = 0 \tag{3.3}$$

ならば, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は保存的である.

任意の $x_0 \in X$ に対して関数 $d_0(x) = d(x, x_0)$ が $\mathcal{A}$ に属することを仮定する. もし $x_0 \in X$ が存在して $\Gamma^c(d_0)(x)$ と $\int_{x \neq y} (1 \wedge d(x,y)^2) \, J(x, \mathrm{d}y)$ が X 上有界かつ

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{1}{r \log r} \log m(B_{x_0}(r)) < \infty$$

ならば $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は保存的である. ここで, $B_{x_0}(r)$ は点 x_0 中心, 半径 $r > 0$ の閉球である. 実際, $\rho(x) = d_0(x)$ とし, ある $\alpha > 0$ と $c \in (0,1]$ に対して $F(x,y) \equiv c$ とおけば, 数列 $a_n = \alpha \log n$ と任意の $T > 0$ に対して (3.3) が成立する. この結果は [22, 38, 39] で示されている.

さらに $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が強局所型ディリクレ形式ならば, 数列 $\{p_n\}$ が現れないので, 条件 (3.3) は

$$\liminf_{n \to \infty} m(B_{x_0}(n+3)) \exp\left(-na_n + a_n^2 M_0 T\right) = 0 \tag{3.4}$$

となる. ただし $M_0 = \sup_{r>0} M_\rho(r) < \infty$. 従って, ある $x_0 \in X$ に対して

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{1}{r^2} \log m(B_{x_0}(r)) < \infty$$

ならば, 定理 3.5 より $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は保存的である. 実際, $\rho(x) = d_0(x)$ ととれば, 定数 $\alpha > 0$ と $T > 0$ を適切に選ぶことで数列 $a_n = \alpha n$ に対して (3.4) が成立する. この結果は [9, Theorem 7] で得られている ([14, 5.7] や [15, 6.3] も参照せよ).

注意 3.6. (i) 仮定 3.4 を満たす関数 F と $\rho \in \mathcal{A}$ の組で, $M_0 = \sup_{r>0} M_\rho(r) < \infty$ を満たすものを取る. X 上の擬距離 d_ρ を

$$d_\rho(x,y) = \frac{1}{\sqrt{M_0}}|\rho(x) - \rho(y)|, \quad (x,y) \in X \times X$$

と定義すれば, d_ρ は Frank-Lenz-Wingert [12] の意味での $(\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{F})$ の内在的距離である. しかし一般に, d_ρ は $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の内在的距離ではない. [12] の意味での正則ディリクレ形式の内在的距離の具体例については, 例えば [12, 37] を参照せよ.
(ii) 次章で現れる, 重み付きグラフ上のマルコフ連鎖に対しては, グラフの辺上を動く対称拡散過程を導入することで, [17, 52] と同様の保存性判定法が得られる. Folz [11] はこの主張を確率論的に証明し, Huang [27] は解析的な別証明を与えた.
(iii) 大島・上村 ([44]) により, 下に有界な半ディリクレ形式の枠組みでも, ハント過程の保存性の成立条件が調べられている.

例 3.7. ([48, Example 4.11]) $D \subset \mathbb{R}^d$ はなめらかな境界を持つ有界領域とする. $c(x,y)$ は $D \times D \setminus \mathrm{diag}$ 上の可測な正値関数で, 各 $(x,y) \in D \times D \setminus \mathrm{diag}$ に対して $c(x,y) = c(y,x)$ を満たすものとする. $0 < \alpha < 2$ とし, $L^2(D)$ 上の対称双線形形式を

$$\mathcal{E}(u,v) = \iint_{D \times D \setminus d} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) \frac{c(x,y)}{|x-y|^{d+\alpha}} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad u,v \in C_0^\infty(D)$$

と定める. ここで $C_0^\infty(D)$ は D 上の台がコンパクトで滑らかな関数全体の集合とする. $c(x,y)$ が上下から正定数で抑えられる場合, $(\mathcal{E}, C_0^\infty(D))$ の閉包 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が生成する対称ハント過程は censored stable-like process と呼ばれる (例えば [5, 6] を参照せよ). 特に $\alpha > 1$ ならば, この確率過程は確率 1 で D の境界 ∂D に到達する ([5]).
以下では $1 < \alpha < 2$ を仮定し, $\delta_D(x) = \inf\{|x-y| \mid y \in \partial D\}$ とおく.

(i) $c(x,y)$ が D の境界付近で十分退化すれば, 対応する対称ハント過程は保存的になる. 実際, 正数 p に対して $c(x,y) \asymp \delta_D(x)^p + \delta_D(y)^p$ と仮定すると, $p > \alpha$ ならば $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は保存的である. このことは, ρ と $F(x,y)$ として

$$\rho(x) = \sqrt{-c \log \sigma(x)}, \qquad F(x,y) = \frac{1}{2}(\delta_D(x) \vee \delta_D(y))$$

(σ は $\sigma \asymp \delta_D$ を満たすある滑らかな関数で c は正定数) を取れば, 定理 3.5 から従う.

(ii) $c(x,y) \equiv 1$ とする. 正数 r に対して D 上の可測関数 $f(x)$ は $f(x) \asymp 1/\delta_D(x)^r$ を満たすものとする. $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ から生成される対称ハント過程 $\mathbf{M} = (\{X_t\}_{t \ge 0}, \{P_x\}_{x \in D})$ の測度 $\mu(\mathrm{d}x) = f(x)\,\mathrm{d}x$ による時間変更過程は, r の値が大きいと D の境界付近で動きが遅くなり, ∂D に到達しにくくなる. 特にこの確率過程が保存的であるための必要十分条件は $r \ge \alpha$ である.

領域上の拡散過程に対する保存性判定の問題については, 例えば [46] を参照せよ.

4. Upper rate function

本章では正則ディリクレ形式から生成される対称ハント過程の upper rate function を調べる.

4.1. 重み付きグラフ上のマルコフ連鎖

本節の内容は X. Huang 氏 との共同研究 ([28]) に基づく. 本節では, 重み付きグラフ上のマルコフ連鎖の upper rate function が, リーマン多様体上のブラウン運動や対称拡散過程の場合と全く同様に特徴づけられることを紹介する.

まず初めに, Keller-Lenz [34] に従い, 重み付きグラフの定義を述べる. V を可算無限集合とし, μ を V 上の正値関数とする. このとき, 関数 μ を V 上のラドン測度と見なすことができる. w は $V\times V$ 上の非負値対称関数とし, 任意の点 $x\in V$ について

$$w(x,x)=0, \qquad \sum_{y\in V} w(x,y)<\infty$$

を満たすものとする. 以上で定まる 3 つ組 (V,w,μ) を**重み付きグラフ**と呼ぶ. 2 点 $x,y\in V$ に対して $w(x,y)>0$ が成立するとき, x と y は**隣接している**といい, $x\sim y$ とかく. 特に, V の各点が隣接点を有限個しか持たないとき, 重み付きグラフ (V,w,μ) は**局所有限**であるという. 点列 $(x_0,x_1,\dots,x_n)$ は, $x_0=x$, $x_n=y$, $x_{k-1}\sim x_k$ $(k=1,2,3,\dots,n)$ を満たすとき, x と y を結ぶ**道**であるという. 特に任意の相異なる 2 点 $x,y\in V$ を結ぶ道が存在するとき, 重み付きグラフ (V,w,μ) は**連結**であるという.

以下では (V,w,μ) を局所有限で連結な重み付きグラフとする. V 上の関数で, 有限個の点以外では値 0 をとるもの全体の集合を $C_0(V)$ とする. このとき, $L^2(V;\mu)$ 上の対称双線形形式

$$\mathcal{E}(u,v)=\frac{1}{2}\sum_{x\in V}\sum_{y\in V} w(x,y)(u(x)-u(y))(v(x)-v(y)), \quad u,v\in C_0(V)$$

は可閉であり, $(\mathcal{E},C_0(V))$ の閉包 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は $L^2(V;\mu)$ 上の正則ディリクレ形式となる. $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が生成するマルコフ連鎖を, 重み付きグラフ (V,w,μ) に対応するマルコフ連鎖と呼ぶことにする. このマルコフ連鎖は, 次で定義される行列 $(q_{xy})_{x,y\in V}$ を Q-matrix にもつ V 上の最小なマルコフ連鎖となる:

$$q_{xy}=\begin{cases} \dfrac{w(x,y)}{\mu(x)} & (x\neq y) \\[2ex] -\dfrac{\sum_{z\in V,z\neq x} w(x,z)}{\mu(x)} & (x=y). \end{cases}$$

定義 4.1. (V,w,μ) を重み付きグラフとする. σ は $V\times V$ から有界閉区間 $[0,1]$ への関数で, 次の条件を持たすものとする: 任意の $x,y\in V$ について

$$\sigma(x,y)=\sigma(y,x), \quad \sigma(x,y)>0 \iff x\sim y.$$

(1) 任意の点 $x\in V$ に対して不等式

$$\sum_{y\in V}\sigma(x,y)^2 w(x,y)\le \mu(x)$$

が成立するとき, 関数 σ は重み付きグラフ (V,w,μ) に**適合している**という.

(2) σ を重み付きグラフ (V,w,μ) に適合した関数とする. $V\times V$ 上の関数

$$d_\sigma(x,y)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\sigma(x_{k-1},x_k)\mid (x_0,x_1,\ldots,x_n)\text{ は } x \text{ と } y \text{ を結ぶ道}\right\},\ x,y\in V$$

を, 重み付きグラフ (V,w,μ) に**適合した道の距離**という.

注意 4.2. 重み付きグラフ (V,w,μ) に適合した道の距離は V 上の距離になる. この距離は強局所型ディリクレ形式の内在的距離の類似であり, Frank-Lenz-Wingert [12] の意味での $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の内在的距離になる.

定義 4.3. 重み付きグラフ (V,w,μ) に対応するマルコフ連鎖を $\mathbf{M}=(\{X_t\}_{t\geq 0},\{P_x\}_{x\in V})$ とかき, このマルコフ連鎖は保存的であることを仮定する. d を V 上の距離とし, 点 $x\in V$ を 1 つ固定する. $[0,\infty)$ 上の単調増加な正値関数 $R(t)$ は, 等式

$$P_x(\text{ある } T>0 \text{ が存在して, 任意の } t\geq T \text{ に対して } d(x,X_t)\leq R(t))=1$$

が成立するとき, マルコフ連鎖 $\mathbf{M}$ の距離 d に関する **upper rate function** であるという.

V 上の距離 d に関する, 中心 $x_0\in V$, 半径 $r>0$ の閉球を $B_d(x_0,r)$ とおく.

定理 4.4. (X. Huang 氏との共同研究 [28, Theorem 1.7]) (V,w,μ) を重み付きグラフとし, d_σ をこのグラフに適合した距離とする. 条件

(i) $\displaystyle\inf_{x\in V}\mu(x)>0$,

(ii) $\displaystyle\int_{\cdot}^{\infty}\frac{r}{\log\mu(B_{d_\sigma}(x_0,r))}\,\mathrm{d}r=\infty$

の下で次が成立する.

(1) 重み付きグラフ (V,w,μ) に対応するマルコフ連鎖 $\mathbf{M}$ は保存的である.

(2) ある定数 $c>0$ と $\hat{R}\geq 1$ が存在して, 関数

$$\psi(R)=c\int_{\hat{R}}^{R}\frac{r}{\log\mu(B_{d_\sigma}(x_0,r))+\log\log r}\,\mathrm{d}r$$

の逆関数 $\psi^{-1}(t)$ はマルコフ連鎖 $\mathbf{M}$ の距離 d_σ に関する upper rate function となる.

定理 4.4 (2) は, リーマン多様体上のブラウン運動の upper rate function に関する Hsu-Qin [25] の結果をマルコフ連鎖へ拡張するとともに, Huang [26] での体積増大度に関する制限を緩めている. 特に定理 4.4 (2) は精密であることも分かる. 一方で, 定理 4.4 (1) は新しい結果ではない. 実際, Folz [11] および Huang [27] は, 条件 (i) を課さずにマルコフ連鎖の保存性を示している (注意 3.6 も参照せよ).

定理 4.4 の証明では, いわゆる cut-off 関数が必要となる. ここでは, 重み付きグラフ G_0 の各辺に頂点を加えて "修正した重み付きグラフ" G を構成し, 隣接点間距離を縮める. この操作により, Huang [26] に比べ精密な cut-off 関数を G 上に構成して, G 上のマルコフ連鎖の upper rate function を得る. さらに, このマルコフ連鎖を適切に時間変更すれば G_0 上のマルコフ連鎖になることから, G_0 上のマルコフ連鎖の upper rate function を導出できる.

4.2. 内部消滅を持たない対称マルコフ過程

3 章で対称マルコフ過程の保存性を示す際に, 飛躍の大きさを関数 $F(x,y)$ で区別し, 小さい飛躍に対応した関数 $\rho \in \mathcal{A}$ を導入した (仮定 3.4). 本節では, 以上の関数にパラメータを入れて, 保存的な対称マルコフ過程の upper rate function を調べる. $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は仮定 3.1 を満たす正則ディリクレ形式とし, $\mathbf{M}=(\{X_t\}_{t\geq 0},\{P_x\}_{x\in X})$ は $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ から生成される対称ハント過程とする.

以後, $\mathcal{A}$ は空集合ではないと仮定し, $\rho \in \mathcal{A}$ を固定する. 単調増加な正値関数 $R(t)$ $(t>0)$ は, 等式

$$P_x\,(\text{ある } T>0 \text{ が存在して, 任意の } t\geq T \text{ に対して } \rho(X_t)\leq R(t))=1, \quad \text{q.e. } x\in X$$

が成立するとき, $\mathbf{M}$ の関数 ρ に関する **upper rate function** であるという.

$(0,\infty)$ 上の非減少関数 $v(r)\geq 1$ は, $m(K_\rho(r))\leq v(r)$ $(r>0)$ を満たすものとする. また C_R $(R\geq 6)$ を以下で定める:

$$C_R=\frac{1}{32}\cdot\frac{R}{\log v(R)+\log\log R}.$$

仮定 4.5. $\rho_1=\rho$ とする. $X\times X\setminus \mathrm{diag}$ 上の非減少な対称正値関数列 $F_r(x,y)$ $(r\geq 1)$ と X 上の非減少な関数列 $\rho_r\in\mathcal{A}$ $(r\geq 1)$ の組が存在して次が成立する:

(i) 各 $r>0$ に対して

$$\sup_{x\in X}\int_{d(x,y)\geq F_r(x,y)} J(x,\mathrm{d}y)<\infty.$$

(ii) 任意の $r\geq 1$ に対して $\sup_{0<d(x,y)<F_r(x,y)}|\rho_r(x)-\rho_r(y)|$ は有界である. さらに定数 $r_0\geq 6$ が存在して, 任意の $r\geq r_0$ に対して $0<d(x,y)<F_r(x,y)$ ならば

$$|\rho_r(x)-\rho_r(y)|\leq C_r$$

(iii) 任意のコンパクト集合 $K\subset X$ に対して定数 $r_1=r_1(K)\geq 1$ が存在して, 任意の $r\geq r_1$ に対して $K\subset K_{\rho_r}(r/4)\,(=\{x\in X\mid \rho_r(x)\leq r/4\})$.

仮定 4.5 の条件 (i) (ii) は, 仮定 3.4 にパラメータを入れたものである. 条件 (iii) は, $K_{\rho_r}(r/4)$ が r について一般に単調ではないために課している技術的なものである.

仮定 4.5 を満たす $F_r(x,y)$ と 関数列 ρ_r の組を固定して

$$\Gamma_r^j(u)(x)=\int_{0<d(x,y)<F_r(x,y)}(u(x)-u(y))^2\,J(x,\mathrm{d}y), \quad x\in X$$

とおく. さらに

$$M_1^r(u,R)=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in K_{\rho_r}(R)}\Gamma^c(u)(x)+\operatorname*{ess\,sup}_{x\in K_{\rho_r}(R)}\Gamma_r^j(u)(x)$$

と定め, $R\geq 1$ に対して $M_1(u,R)=M_1^R(u,R)$ とおく. $N_1(R)\geq 1$ $(R\geq r_0)$ は非減少関数で, 任意の $R\geq r_0$ に対して $M_1(\rho_R,R)\leq N_1(R)$ を満たすものとする. さらに

$$M_2(r)=\sup_{x\in X}\int_{d(x,y)\geq F_r(x,y)} J(x,\mathrm{d}y)$$

と定め, $N_2(r)$ $(r \geq r_0)$ は非増加な非負値関数で, 任意の $r \geq r_0$ に対して $M_2(r) \leq N_2(r)$ を満たすものとする. $N_2(R)$ は大きな飛躍の起きる頻度を表している.

正数 ε を固定し, 関数 $\psi_\varepsilon(R)$ $(R \geq 6)$ を以下で定める:

$$\psi_\varepsilon(R) = \frac{R^2}{N_1(R)(\log v(R) + \log\log R)} \wedge \frac{1}{N_2(R)(\log R)^{1+\varepsilon}}. \tag{4.1}$$

仮定 4.6. 定数 $r_2 \geq r_0$ が存在して, $\psi_\varepsilon(R)$ は (r_2, ∞) 上狭義単調増加で $\lim_{R\to\infty} \psi_\varepsilon(R) = \infty$.

定理 4.7. 仮定 3.1 と仮定 4.5 の下, もし $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が保存的ならば, 定数 $c > 0$ が存在して $\psi_\varepsilon^{-1}(ct)$ は $\mathbf{M}$ の ρ に関する upper rate function となる.

系 4.8. 定理 4.7 と同じ条件の下, 定数 $c > 0$ が存在して

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\rho(X_t)}{\psi_\varepsilon^{-1}(ct)} \leq 1 \quad P_x\text{-a.s., q.e. } x \in X.$$

注意 4.9. 4.1 節では, 重み付きグラフ上のマルコフ連鎖の upper rate function を, リーマン多様体上のブラウン運動や対称拡散過程の場合 ([20, 25, 45]) と同様に特徴づけできることを紹介した. 関数 ψ_ε は定理 4.4 で現れた関数 ψ の類似物であるが, 積分の形では与えられていない. 定理 4.7 は Grigor'yan [19] の拡張になるが, [20, 25, 45] の結果や定理 4.4 に比べ精密ではない. しかし, 定理 4.7 は対称ハント過程が大きい飛躍を持つ場合にも適用できる.

定理 4.7 の証明の方針は, [19, 20, 25, 26, 45] や定理 4.4 と同様で, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ から生成される対称ハント過程 $\mathbf{M}$ に対して, 球からの脱出時間に関する確率を評価することである. まず, 正則ディリクレ形式 $(\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{F})$ から生成される対称ハント過程 $\mathbf{M}^{(1)}$ の球からの脱出時間に関する確率を, [19, 20, 26] や定理 4.4 と同様に, 関数不等式を用いて評価する. 次に, 注意 3.3 で述べたような $\mathbf{M}^{(1)}$ と $\mathbf{M}$ との関係を用いて, 元々知りたい対称ハント過程 $\mathbf{M}$ の球からの脱出時間に関する確率の評価を得る. なお, この評価は [21] でも解析的に与えられている.

例 4.10. 任意の $x \in X$ と $r > 0$ に対して, $B_x(r) = \{y \in X \mid d(y,x) \leq r\}$ はコンパクトで, 定数 $\alpha > 0$ が存在して $m(B_x(r)) \lesssim r^\alpha$ となることを仮定する. 以下では点 $x_0 \in X$ を固定する. φ は X 上の Borel 可測関数であり, ある $p > 0$ に対して

$$\varphi(x) \asymp 1 \wedge \frac{1}{d(x_0, x)^p}$$

を満たすものとする. また, 正則ディリクレ形式 $(\mathcal{E}^\varphi, \mathcal{F}^\varphi)$ は $C_0^{\mathrm{lip}}(X) \subset \mathcal{F}^\varphi$ を満たし, さらに $u, v \in C_0^{\mathrm{lip}}(X)$ に対して

$$\mathcal{E}^\varphi(u,v) = \iint_{X\times X\setminus\mathrm{diag}} (u(x)-u(y))(v(x)-v(y))\varphi(x)\varphi(y)\, J(x,y)m(\mathrm{d}y)m(\mathrm{d}x)$$

となるものとする. ここで $C_0^{\mathrm{lip}}(X)$ は X 上の台がコンパクトなリプシッツ連続関数全体の集合とし, $J(x,y)$ は $X \times X \setminus \mathrm{diag}$ 上の対称な非負値関数とする. このとき, 関数 $d_0(x) = d(x, x_0)$ は $\mathcal{A}$ に属する. また, $(\mathcal{E}^\varphi, \mathcal{F}^\varphi)$ の飛躍測度 $J^\varphi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$ は, $J^\varphi(x, \mathrm{d}y) = \varphi(x)\varphi(y)J(x,y)m(\mathrm{d}y)$ とおくと, $J^\varphi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = J^\varphi(x,\mathrm{d}y)m(\mathrm{d}x)$ と表される.

以下では, 定数 $\alpha > 0$ と $\beta \in (0,2)$ が存在して

$$J(x,y) \lesssim \frac{1}{d(x,y)^{\alpha+\beta}}$$

と仮定する. $(\mathcal{E}^\varphi, \mathcal{F}^\varphi)$ から生成される対称ハント過程 $\mathbf{M}^\varphi = (\{X_t^\varphi\}_{t\geq 0}, \{P_x^\varphi\}_{x\in X})$ について, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して定数 $c > 0$ が存在して

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{d(x, X_t^\varphi)}{ct^{\frac{(2+p)}{2(\beta+p)}}(\log t)^{\frac{(1+\varepsilon)(2+p)}{2(\beta+p)}}} \leq 1 \quad P_x^\varphi\text{-a.s., q.e. } x \in X. \tag{4.2}$$

実際, $\rho(x) = \rho_r(x) = d_0(x)$, $F(r) = r^{\frac{2}{p+2}}$ とおけば, ある $c_1 > 0$ と $c_2 > 0$ に対して

$$N_1(R) = c_1 F(R)^{2-\beta}, \quad N_2(R) = \frac{c_2}{F(R)^{p+\beta}}$$

と取れる. $\psi_\varepsilon(R) \asymp R^{\frac{2(\beta+p)}{2+p}}/(\log R)^{1+\varepsilon}$ より $\psi_\varepsilon^{-1}(t) \asymp t^{\frac{(2+p)}{2(\beta+p)}}(\log t)^{\frac{(1+\varepsilon)(2+p)}{2(\beta+p)}}$ なので, 系 4.8 より (4.2) が従う.

パラメータ p の値が大きくなるほど, $\varphi(x)$ は小さくなるので, 空間内での粒子の広がり方が遅くなる. 式 (4.2) はこの遅さを定量的に表現している.

5. Lower rate function

本章では正則ディリクレ形式から生成される対称ハント過程の lower rate function を調べる. $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は仮定 3.1 を満たす正則ディリクレ形式とし, $\mathbf{M} = (\{X_t\}_{t\geq 0}, \{P_x\}_{x\in X})$ は $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ から生成される対称ハント過程とする. $p_t(x, \mathrm{d}y)$ を $\mathbf{M}$ の推移確率とする. すなわち,

$$p_t(x, A) = P_x(X_t \in A), \quad x \in X,\ t \geq 0,\ A \in \mathcal{B}(X).$$

この章を通じて以下の条件を仮定する:

仮定 5.1. (絶対連続性) Borel 可測な適切除外集合 $N \subset X$ と $(0,\infty)\times(X\setminus N)\times(X\setminus N)$ 上の非負値対称核 $p_t(x,y)$ が存在して, $p_t(x, \mathrm{d}y) = p_t(x,y)\, m(\mathrm{d}y)$ かつ

$$p_{t+s}(x,y) = \int_{X\setminus N} p_t(x,z)p_s(z,y)\, m(\mathrm{d}z), \quad x, y \in X\setminus N,\ t, s > 0.$$

例えば $(0,\infty)$ 上の左連続な正値関数 $M(t)$ が存在して, 任意の $f \in L^1(X;m)$ と $t > 0$ に対して $\|T_t f\|_\infty \leq M(t)\|f\|_1$ ならば, 仮定 5.1 が成立して

$$p_t(x,y) \leq M(t), \quad x, y \in X\setminus N,\ t > 0$$

([1, Theorem 3.1]). $(x,y) \notin (X\setminus N)\times(X\setminus N)$ と $t > 0$ に対して $p_t(x,y) = 0$ と定義すれば

$$p_{t+s}(x,y) = \int_X p_t(x,z)p_s(z,y)\, m(\mathrm{d}z), \quad x, y \in X,\ t, s > 0. \tag{5.1}$$

以後, (3.2) で定義した集合 $\mathcal{A}$ は空でないことを仮定する. 関数 $\rho \in \mathcal{A}$ を固定し,

$$w^{(c)}(R) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in K_\rho(R)} \Gamma^c(\rho)(x), \quad w^{(j)}(R) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} \int_{X\setminus\{x\}} \left\{(\rho(x)-\rho(y))^2 \wedge R^2\right\} J(x, \mathrm{d}y)$$

とおく．$v(r)$ は $(0,\infty)$ 上の非減少正値関数で $m(K_\rho(r)) \le v(r)$ $(r>0)$ を満たすものとする．また $g(r)$ は $(0,\infty)$ 上の微分可能な非増加正値関数で

$$\frac{1}{r^2}(w^{(c)}(r)+w^{(j)}(r)) \le g(r), \quad r>0$$

を満たすものとする．関数 $h(r)$ を $h(r)=1/g(r)$ と定め,

$$I(R)=\int_R^\infty \frac{h'(t)}{v(t)}\,\mathrm{d}t$$

とおく．関数 $h(r)$ は $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ のスケールを表していると見なせる．例えば, ディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が $\mathbb{R}^d$ 上のブラウン運動と指数 $\alpha\in(0,2)$ の対称安定過程との独立和に対応する場合を考える．すなわち

$$\mathcal{E}(u,v)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x + c_{d,\alpha}\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\mathrm{diag}}\frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{d+\alpha}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\mathcal{F}=\left\{u\in L^2(\mathbb{R}^d)\mid \frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^2(\mathbb{R}^d),\ 1\le i\le d\right\}.$$

ただし

$$c_{d,\alpha}=\frac{\alpha 2^{\alpha-3}\Gamma((d+\alpha)/2)}{\pi^{d/2}\Gamma(1-\alpha/2)}.$$

$\rho(x)=|x|$ と取れば, 定数 $c_1>0$ と $c_2>0$ が存在して $w^{(c)}(r)\le c_1$ かつ $w^{(j)}(r)\le c_2 r^{2-\alpha}$. 従って, 定数 $c_3>0$ が存在して $h(r)=c_3 r^\alpha$ と取れる．また $d>\alpha$ ならば, ある $c_4>0$ に対して $I(R)=c_4R^{\alpha-d}$ となり, $d\le\alpha$ ならば $I(R)=\infty$ となる．

体積増大度に関して次の条件を課す:

仮定 5.2. (体積倍増条件) 定数 $c_V>0$ が存在して

$$m(K_\rho(2R))\le c_V\cdot m(K_\rho(R)), \quad R>0.$$

定理 5.3. ([50]) $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は過度的で仮定 3.1 を満たすものとし, 仮定 5.1–5.2 が成立していることを仮定する．もし任意の $r>0$ に対して $I(r)<\infty$ が成立し, ある $t_0>0$ が存在して $(0,\infty)$ 上の狭義単調増加な正値関数 $r(t)$ が条件

$$\int_{t_0}^\infty \frac{1}{I(r(s))}\sup_{y\in X}p_s(x,y)\,\mathrm{d}s<\infty, \quad x\in X \tag{5.2}$$

を満たすならば, q.e. $x\in X$ に対して

$$P_x\,(\text{ある } T>0 \text{ が存在して, すべての } t\ge T \text{ に対して } \rho(X_t)\ge r(t))=1.$$

定理 5.3 の結論を満たす関数 $r(t)$ を, $\mathbf{M}$ の ρ に関する **lower rate function** という．

注意 5.4. 仮定 5.1 の下, もし任意の $x\in X$ に対して

$$\int_1^\infty \sup_{y\in X}p_s(x,y)\,\mathrm{d}s<\infty$$

ならば $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は過度的である. 実際, $m(\{x\in X \mid f(x)=0\})=0$ を満たす任意の関数 $f\in L^1_+(X;m)\cap\mathcal{B}_b(X)$ に対して

$$Gf=\int_0^\infty p_s f\,\mathrm{d}s, \quad m\text{-a.e.}$$

かつ q.e. $x\in X$ に対して

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p_s f(x)\,\mathrm{d}s &= \int_0^1\left(\int_X p_s(x,y)f(y)\,m(\mathrm{d}y)\right)\mathrm{d}s+\int_1^\infty\left(\int_X p_s(x,y)f(y)\,m(\mathrm{d}y)\right)\mathrm{d}s\\ &\le \|f\|_\infty+\|f\|_1\int_1^\infty \sup_{y\in X} p_s(x,y)\,\mathrm{d}s<\infty.\end{aligned}$$

従って $Gf<\infty$, m-a.e. が成立し, 定義より $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は過度的である.

定理 5.3 は, リーマン多様体上のブラウン運動の lower rate function の判定に関するGrigor'yan [19] の結果を対称ハント過程に拡張しており, 対称安定過程に関して精密である. 証明の方針は Grigor'yan [19] と同様で, ある固定された時刻から先で, 粒子がコンパクト集合上に到達する確率を上から評価する. 具体的には, まず [4, Theorem 3.10] と同様の議論で, 先に述べた確率を容量で評価する. 次に, 大倉 [41] ([42] も参照せよ) による容量不等式を用いて容量が評価できるので, 必要な評価が得られる.

より具体的な条件下では, (5.2) をブラウン運動や対称安定過程の lower rate function の積分判定法と同様の形に書き換えることができる.

仮定 5.5. 仮定 5.1, 仮定 5.2 に加え, 次が成立する.

(i) $p>0$ と $c_1>0$ が存在して, 任意の $x\in X$ と $t\ge 1$ に対して

$$p_t(x,x)\le\frac{c_1}{v(t^p)}.$$

(ii) $\nu>0$ と $c_2>0$ が存在して, $r>0$ と $R>r$ に対して

$$\frac{v(R)}{v(r)}\ge c_2\left(\frac{R}{r}\right)^\nu.$$

(iii) $c_3>1$ が存在して任意の $R>0$ に対して $h(c_3R)\ge 2h(R)$.

系 5.6. $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は過度的で仮定 3.1 を満たすものとする. さらに仮定 5.5 が成立して, 任意の $r>0$ に対して $I(r)<\infty$ となること仮定する. 関数 $r(t)>0$ $(t>0)$ は, 単調増加で $r(t)/t^p\to 0$ $(t\to\infty)$ かつ, ある $t_0>0$ に対して

$$\int_{t_0}^\infty \frac{r(t)^\nu}{t^{p\nu}h(r(t))}\,\mathrm{d}t<\infty$$

ならば, $\mathbf{M}$ の ρ に関する lower rate function である.

例 5.7. 任意の $x\in X$ と $r>0$ に対して $B_x(r)=\{y\in X\mid d(y,x)\le r\}$ はコンパクトで, 定数 $\alpha>0$ が存在して任意の $x\in X$ と $r>0$ に対して $m(B_x(r))\asymp r^\alpha$ を仮定する.

γ は $X\times X$ 上の Borel 可測関数で, $\beta_1<\beta_2$ を満たす定数 $\beta_1,\beta_2\in(0,2)$ と $\gamma_1<\gamma_2$ を満たす定数 $\gamma_1,\gamma_2\in(0,2)$ に対して

$$\begin{aligned}\beta_1\le\gamma(x,y)\le\beta_2,\quad d(x,y)<1,\\ \gamma_1\le\gamma(x,y)\le\gamma_2,\quad d(x,y)\ge 1\end{aligned}$$

を満たすものとする. $J(x,y)$ は $X\times X\setminus\mathrm{diag}$ 上の対称な正値関数で

$$J(x,y)\asymp\frac{1}{d(x,y)^{\alpha+\gamma(x,y)}}$$

を満たし, ディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は $C_0^{\mathrm{lip}}(X)\subset\mathcal{F}$ かつ

$$\mathcal{E}(u,u)=\iint_{X\times X\setminus\mathrm{diag}}(u(x)-u(y))^2\,J(x,y)m(\mathrm{d}x)m(\mathrm{d}y),\quad u\in\mathcal{F}\cap C_0(X)$$

を満たすものとする. このとき, 任意の固定点 $o\in X$ に対して関数 $\rho(x)=d(o,x)$ は $\mathcal{A}$ に属する.

関数 γ の仮定より

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(u,u)\\ &\gtrsim\iint_{d(x,y)<1}\frac{(u(x)-u(y))^2}{d(x,y)^{\alpha+\beta_1}}\,m(\mathrm{d}x)m(\mathrm{d}y)+\iint_{d(x,y)\ge1}\frac{(u(x)-u(y))^2}{d(x,y)^{\alpha+\gamma_2}}\,m(\mathrm{d}x)m(\mathrm{d}y)\end{aligned}$$

なので, [1, Theorem 3.1] と [8, Theorems 3.1 and 3.2] より仮定 (5.1) が成立して

$$p_t(x,y)\le\frac{c}{t^{\alpha/\gamma_2}},\quad x,y\in X\setminus N,\ t\ge1.$$

$0<\gamma_1<\gamma_2<2\wedge\alpha$ と仮定すれば, 注意 5.4 より $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は過度的である. さらに $w^{(j)}(t)\le c't^{2-\gamma_1}$ より $h(t)=c''t^{\gamma_1}$ と取れるので,

$$\int_1^\infty\frac{r(t)^\alpha}{t^{\alpha/\gamma_2}h(r(t))}\,\mathrm{d}t\asymp\int_1^\infty\frac{r(t)^\alpha}{t^{\alpha/\gamma_2}r(t)^{\gamma_1}}\,\mathrm{d}t=\int_1^\infty\frac{r(t)^{\alpha-\gamma_1}}{t^{\alpha/\gamma_2}}\,\mathrm{d}t. \tag{5.3}$$

特に正定数 c と ε に対して $r(t)=ct^{\frac{1}{\gamma_2}\cdot\frac{\alpha-\gamma_2}{\alpha-\gamma_1}}/(\log t)^{\frac{1+\varepsilon}{\alpha-\gamma_1}}$ とおくと, 先の積分は収束する. よって系 5.6 より, q.e. $x\in X$ に対して

$$P_x\,(\text{ある } T>0 \text{ が存在して, すべての } t\ge T \text{ に対して } d(x,X_t)\ge r(t))=1.$$

なお, (5.3) の最右辺の積分は, 序で述べたブラウン運動や対称安定過程の lower rate function の判定法で現れる積分と類似の形をしている.

参考文献

[1] M. Barlow, R. Bass, Z.-Q. Chen and M. Kassmann, Non-local Dirichlet forms and symmetric jump processes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2009), 1963–1999.

[2] M. T. Barlow, A. Grigor'yan and T. Kumagai, Heat kernel upper bounds for jump processes and the first exit time, *J. Reine Angew. Math.* **626** (2009), 135–157.

[3] R. F. Bass, Adding and subtracting jumps from Markov processes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **255** (1979), 363–376.

[4] A. Bendikov and L. Saloff-Coste, On the regularity of sample paths of sub-elliptic diffusions on manifolds, *Osaka J. Math.* **42** (2005), 677-722.

[5] K. Bogdan, K. Burdzy and Z.-Q. Chen, Censored stable processes, *Probab. Theory Related Fields* **127** (2003), 89–152.

[6] Z.-Q. Chen, P. Kim and R. Song, Two-sided heat kernel estimates for censored stable-like processes, *Probab. Theory Related Fields* **146** (2010), 361–399.

[7] Z.-Q. Chen and T. Kumagai, Heat kernel estimates for stable-like processes on d-sets, *Stochastic Process. Appl.* **108** (2003), 27–62.

[8] Z.-Q. Chen and T. Kumagai, Heat kernel estimates for jump processes of mixed types on metric measure spaces, *Probab. Theory Related Fields* **140** (2008), 277–317.

[9] E. B. Davies, Heat kernel bounds, conservation of probability and the Feller property, *J. Anal. Math.* **58** (1992), 99–119.

[10] A. Dvoretzky and P. Erdös, Some problems on random walk in space, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950, pp. 353–367, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951.

[11] M. Folz, Volume growth and stochastic completeness of graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **366** (2014), 2089-2119.

[12] R. L. Frank, D. Lenz and D. Wingert, Intrinsic metrics for non-local symmetric Dirichlet forms and applications to spectral theory, *J. Funct. Anal.* **266** (2014), 4765–4808.

[13] M. Fukushima, Dirichlet spaces and strong Markov processes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **162** (1971), 185–224.

[14] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, 2nd rev. and ext. ed., Walter de Gruyter, 2011.

[15] 福島 正俊, 竹田 雅好, マルコフ過程, 培風館, 2008.

[16] M. P. Gaffney, The conservation property of the heat equation on Riemannian manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.* **12** (1959) 1–11.

[17] A. Grigor'yan, On stochastically complete manifolds, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR,* **290** (1986), 534–537.

[18] A. Grigor'yan, Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.* **36** (1999), 135–249.

[19] A. Grigor'yan, Escape rate of Brownian motion on Riemannian manifolds, *Appl. Anal.* **71** (1999), 63–89.

[20] A. Grigor'yan and E. Hsu, Volume growth and escape rate of Brownian motion on a Cartan-Hadamard manifold, Sobolev spaces in mathematics. II, Int. Math. Ser. (N.Y.), **9**, 209–225, Springer, New York, 2009.

[21] A. Grigor'yan, J. Hu and K.-S. Lau, Estimates of heat kernels for non-local regular Dirichlet forms, *Trans. Amer. Math. Soc.* **366** (2014), 6397–6441.

[22] A. Grigor'yan, X. Huang and J. Masamune, On stochastic completeness of jump processes, *Math. Z.* **27** (2012), 1211–1239.

[23] A. Grigor'yan and M. Kelbert, Range of fluctuation of Brownian motion on a complete Riemannian manifold, *Ann. Probab.* **26** (1998), 78–111.

[24] W. J. Hendricks, Lower envelopes near zero and infinity for processes with stable components, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **16** (1970), 261–278.

[25] E. Hsu and G. Qin, Volume growth and escape rate of Brownian motion on a complete Riemannian manifold, *Ann. Probab.* **38** (2010), 1570–1582.

[26] X. Huang, Escape rate of Markov chains on infinite graphs, *J. Theoret. Probab.* **27** (2014), 634–682.

[27] X. Huang, A note on the volume growth criterion for stochastic completeness of weighted graphs, *Potential Anal.* **40** (2014), 117-142.

[28] X. Huang and Y. Shiozawa, Upper escape rate of Markov chains on weighted graphs, *Stochastic Process. Appl.* **124** (2014), 317–347.

[29] K. Ichihara, Some global properties of symmetric diffusion processes, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **14** (1978), 441–486.

[30] K. Ichihara, Explosion problems for symmetric diffusion processes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **298** (1986), 515–536.

[31] N. Ikeda, N. Nagasawa and S. Watanabe, A construction of Markov processes by piecing out, *Proc. Japan Acad.* **42** (1966), 370–375.

[32] Y. Isozaki and T. Uemura, A family of stable-like processes and its global path properties, *Probab. Math. Statist.* **24** (2004), 145–164.

[33] K. Ito and H. P. McKean, *Diffusion Processes and their Sample Paths*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

[34] M. Keller and D. Lenz, Dirichlet forms and stochastic completeness of graphs and subgraphs, *J. Reine. Angew. Math.* **666** (2012), 189–223.

[35] A. Khintchine, Zwei Sätze über stochastische Prozesse mit stabilen Verteilungen, *Rec. Math.* [*Mat. Sbornik*] *N.S.*, **3 (45)** (1938), 577–584.

[36] D. Khoshnevisan, Escape rates for Lévy processes, *Studia Sci. Math. Hungar.* **33** (1997), 177–183.

[37] K. Kuwae and Y. Shiozawa, A remark on the uniqueness of Silverstein extensions of symmetric Dirichlet forms, *Math. Nachr.* **288** (2015), 389–401.

[38] J. Masamune and T. Uemura, Conservation property of symmetric jump processes, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **47** (2011), 650–662.

[39] J. Masamune, T. Uemura and J. Wang, On the conservativeness and the recurrence of symmetric jump-diffusions, *J. Funct. Anal.* **263** (2012), 3984–4008.

[40] P.-A. Meyer, Renaissance, recollements, mélanges, ralentissement de processus de Markov, *Ann. Inst. Fourier* **25** (1975), 464–497.

[41] H. Ôkura, Capacitary upper estimates for symmetric Dirichlet forms, *Potential Anal.* **19** (2003), 211–235.

[42] H. Ôkura and T. Uemura, On the recurrence of symmetric jump processes, to appear in *Forum Math.*

[43] Y. Oshima, On conservativeness and recurrence criteria for Markov processes, *Potential Anal.* **1** (1992), 115-131.

[44] Y. Oshima and T. Uemura, On the conservativeness of some Markov processes, in preparation.

[45] S. Ouyang, Volume growth, comparison theorem and escape rate of diffusion process, preprint, arXiv:1310.3996.

[46] M. M. H. Pang, L^1 properties of two classes of singular second order elliptic operators, *J. London Math. Soc.* **38** (1988), 525–543.

[47] R. L. Schilling, Conservativeness and extensions of Feller semigroups, *Positivity* **2** (1998), 239–256.

[48] Y. Shiozawa, Conservation property of symmetric jump-diffusion processes, *Forum Math.* **27** (2015), 519–548.

[49] Y. Shiozawa, Escape rate of symmetric jump-diffusion processes, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*

[50] Y. Shiozawa, Lower escape rate of symmetric jump-diffusion processes, to appear in *Canad. J. Math.*

[51] Y. Shiozawa and T. Uemura, Explosion of jump-type symmetric Dirichlet forms on $\mathbb{R}^d$, *J. Theoret. Probab.* **27** (2014), 404–432.

[52] K.-Th. Sturm, Analysis on local Dirichlet spaces I. Recurrence, conservativeness and L^p-Liouville properties, *J. Reine Angew. Math.* **456** (1994), 173–196.

[53] M. Takeda, On a martingale method for symmetric diffusion processes and its applications, *Osaka J. Math.* **26** (1989), 605–623.

[54] M. Takeda, On the conservativeness of the Brownian motion on a Riemannian manifold, *Bull. London Math. Soc.* **23** (1991), 86–88.

[55] J. Takeuchi, On the sample paths of the symmetric stable processes in spaces, *J. Math. Soc. Japan* **16** (1964), 109–127.

[56] J. Wang, Stability of Markov processes generated by Lévy type operators, *Chinese J. Contemp. Math.* **32** (2011), 1–20.