Escape rate of symmetric Markov processes

塩沢 裕一（岡山大学大学院自然科学研究科・環境理工学部）

本講演では, 内部消滅を持たない対称マルコフ過程の無限遠方への脱出レートの上限を, 体積増大度と係数増大度で特徴づける. 本予稿では飛躍型対称マルコフ過程の場合に結果を述べるが, 飛躍拡散型対称マルコフ過程の場合も同様の結果が得られる.

(X,d) を局所コンパクト可分距離空間とし, m を X 上の正値ラドン測度で X 全体に台を持つものとする. $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(X;m)$ 上の正則ディリクレ形式とし, $\mathbf{M}=(\{X_t\}_{t\geq 0},\{P_x\}_{x\in X})$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ から生成される m 対称マルコフ過程とする. X 上の台がコンパクトな連続関数全体を $C_0(X)$ とかき, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の Beurling-Deny 分解に非局所項のみが現れることを仮定する:

$$\mathcal{E}(u,v)=\iint_{X\times X\setminus \mathrm{diag}}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))\,J(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\quad u,v\in\mathcal{F}\cap C_0(X).$$

ただし, diag は $X\times X$ 上の対角線集合であり, $J(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$ は $X\times X\setminus\mathrm{diag}$ 上の正値対称ラドン測度である. また, $J(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=J(x,\mathrm{d}y)m(\mathrm{d}x)$ を満たす積分核 $J(x,\mathrm{d}y)$ の存在を仮定する.

X 上の関数 ρ に対して $B_\rho(r):=\{x\in X\mid \rho(x)<r\}$ $(r>0)$ とおき, $\mathcal{A}$ を次で定める:

$$\mathcal{A}:=\left\{\rho\in C(X)\cap\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}\mid \lim_{x\to\Delta}\rho(x)=\infty,\ \text{各 } r>0 \text{ について } B_\rho(r) \text{ は相対コンパクト}\right\}.$$

仮定 1. X 上の単調非減少な非負値関数列 $\{\rho_R\}_{R\geq 1}\subset\mathcal{A}$ と $X\times X\setminus\mathrm{diag}$ 上の単調増加な非負値関数列 $\{F_R\}_{R\geq 1}$ が存在して, 次の条件が成立する:

(i) 各 $R\geq 1$ に対して次が成立する:

- $M_1(R):=\displaystyle\sup_{x\in B_{\rho_R}(R)}\int_{0<d(x,y)<F_R(x,y)}(\rho_R(x)-\rho_R(y))^2J(x,\mathrm{d}y)<\infty;$
- $M_2(R):=\displaystyle\sup_{x\in X}\int_{d(x,y)\geq F_R(x,y)}J(x,\mathrm{d}y)<\infty.$

(ii) 各コンパクト集合 $K\subset X$ に対して, すべての十分大きな R について $K\subset B_{\rho_R}(R/4)$.

(iii) $\rho:=\rho_1$ とおく. すべての十分大きな R に対して

$$0<d(x,y)<F_R(x,y)\quad\Longrightarrow\quad|\rho_R(x)-\rho_R(y)|<\frac{1}{32}\cdot\frac{R}{\log m(B_\rho(R))+\log\log R}.$$

関数 F_R は “飛躍の大きさ” を定め, 関数 ρ_R は “小さい飛躍” に適合した長さを表す.

$N_1(R)$ は $M_1(R)\leq N_1(R)$ を満たす単調非減少関数とし, $N_2(R)$ は $M_2(R)\leq N_2(R)$ を満たす単調非増加関数とする. $\mu\in[0,2)$ を固定し, 関数 $\psi_\mu(R)$ を次で定める:

$$\psi_\mu(R):=\frac{R^{2-\mu}}{N_1(R)\cdot(\log m(B_\rho(R))+\log\log R)}.$$

仮定 2. (i) すべての十分大きな R について $\psi_\mu(R)$ は単調増加かつ $\lim_{R\to\infty}\psi_\mu(R)=\infty$.
(ii) 定数 $\nu>1$ と $c>0$ が存在して

$$\psi_\mu(R)N_2(R)\le\frac{c}{(\log R)^\nu}.$$

仮定 2 (ii) は "大きい飛躍" の起こる頻度を制限する.

定理 1. 仮定 1, 2 の下, 定数 $c>0$ が存在して

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\rho(X_t)}{\psi_\mu^{-1}(ct)}\le 1\quad P_x\text{-a.s.},\ \ m\text{-a.e. } x\in X.$$

定理 1 はリーマン多様体上のブラウン運動に関する Grigor'yan (1999) の結果を純飛躍型マルコフ過程へ拡張している. 一方, Grigor'yan (1999) の結果は, リーマン多様体上のブラウン運動および対称拡散過程の枠組みで, Grigor'yan-Hsu (2009), Hsu-Qin (2010), Ouyang (2013) により一般化および精密化されている. これらの結果は, Huang (J. Theoret. Probab. に掲載予定), Huang-S. (2014) によって, 局所有限な重み付きグラフ上のマルコフ連鎖にも拡張されている.

例 1. (X,d) を d 次元ユークリッド空間とし, $|\cdot|$ をユークリッドノルムとする. m を d 次元ルベーグ測度とし, 積分核 $J(x,\mathrm{d}y)$ について次を仮定する.

- $J(x,\mathrm{d}y)$ は m に絶対連続であり, 定数 $\alpha\in(0,2)$ が存在して密度関数 $J(x,y)$ は

$$J(x,y)\le\frac{c(x,y)}{|x-y|^{d+\alpha}},\quad (x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\mathrm{diag}$$

を満たす. ただし, $c(x,y)$ は $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上の正値可測関数であり, 定数 $\delta\in[0,1)$ と $q\in[0,\alpha)$ が存在して次を満たすものとする:

$$c(x,y)\asymp\begin{cases}(1+|x|)^2(\log(2+|x|))^\delta+(1+|y|)^2(\log(2+|y|))^\delta, & |x-y|<1,\\ (1+|x|)^q+(1+|y|)^q, & |x-y|\ge 1.\end{cases}$$

$\mathbb{R}^d$ 上の台がコンパクトで滑らかな関数全体を $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ とかく. すると, $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の二次形式 $(\mathcal{E},C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ は可閉となり, その閉包 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の正則ディリクレ形式となる (例えば Fukushima-Oshima-Takeda (2011) の Example 1.2.4 を参照せよ). $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が生成する対称マルコフ過程を $\mathbf{M}=(\{X_t\}_{t\ge0},\{P_x\}_{x\in\mathbb{R}^d})$ とかく.

(a) $\alpha-q>1-\delta$ ならば, 定数 $c>0$ が存在して

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{|X_t-X_0|}{e^{ct^{\frac{1}{1-\delta}}}}\le 1\quad P_x\text{-a.s.},\ \ \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^d.$$

(b) $0<\alpha-q\le 1-\delta$ ならば, $0<\varepsilon<\alpha-q+\delta$ を満たす任意の正数 ε に対して定数 $c>0$ が存在して

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{|X_t-X_0|}{e^{ct^{\frac{1}{\beta-q-\varepsilon}}}}\le 1\quad P_x\text{-a.s.},\ \ \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^d.$$

$\delta=1$ かつ $q\in[0,\alpha)$ のとき, 対称マルコフ過程 $\mathbf{M}$ は保存的である [S. (Forum Math. に掲載予定)]. しかし, 脱出レートの上限は分からない.