

進化ゲームと寡占

中央大学法学部

田中靖人

1 マルコフ連鎖とその極限

本稿では進化ゲームの寡占への応用の具体例として、同質的な寡占においてクールノー均衡ではなくすべての企業が競争的な産出量（価格と限界費用が等しくなる産出量）を選ぶ状態が長期的に実現するという分析を、できるだけわかりやすく、かつ完結的に示してみたい¹。

準備として簡単なモデルを使って確率論のマルコフ連鎖について紹介する。天候はなかなか予測し難いものであるが、晴れ・雨それぞれの後ある確率で晴れ・雨になるものとして、ある日に晴れた後あるいは雨が降った後の何日後かに晴れ・雨になる確率を考えてみよう。仮定として晴れた日の翌日は確率 0.8 で晴れ、確率 0.2 で雨になり、雨の日の翌日は確率 0.5 で晴れ、同じく確率 0.5 で雨になるものとする（晴れと雨以外の天候はなく、また 1 日の内に天候が変化することも考えない）。たとえば 11 月 1 日に晴れたとすると、2 日に晴れる確率は 0.8 であるが 3 日に晴れる確率はいくらだろうか。2 日、3 日と晴れが続く確率は $0.8 \times 0.8 = 0.64$ 、一方 2 日に雨、3 日に晴れとなる確率は $0.2 \times 0.5 = 0.1$ であるから 3 日に晴れる確率は合わせて 0.74 であり、雨が降る確率は 0.26 となる。4 日に晴れる確率は 3 日、4 日と晴れが続く場合と、3 日に雨、4 日に晴れとなる場合の確率の和なので $0.74 \times 0.8 + 0.26 \times 0.5 = 0.722$ となる。同様にして 5 日に晴れる確率は $0.722 \times 0.8 + 0.278 \times 0.5 = 0.7166$ である。一方、11 月 1 日に雨が降ったとすると、3 日に晴れる確率は $0.5 \times 0.8 + 0.5 \times 0.5 = 0.65$ 、4 日に晴れる確率は $0.65 \times 0.8 + 0.35 \times 0.5 = 0.695$ 、5 日に晴れる確率は $0.695 \times 0.8 + 0.305 \times 0.5 = 0.7085$ となる。このようにして天候の晴れ、雨などの現象が確率的に起きて行く過程は「マルコフ連鎖」と呼ばれる。今の例では 11 月 1 日に晴れても雨が降ってもその後に晴れる確率は徐々に等しい値に近づいて行くように見える。それは晴れる確率がそれ以上変化しなくなった状態における値である。そのような状態での晴れ、雨の確率の分布は「定常分布」（または極限分布）と呼ばれる²。一般的に晴れた日の翌日に晴れる確率を $p(0 < p < 1)$ 、雨の日の翌日に晴れる確率を $q(0 < q < 1)$ で表し、定常分布において晴れる確率を x で表すと、晴れる確率が変化しなくなるのは次の式が成り立つときである。

$$px + q(1 - x) = x \quad (1)$$

この式から

$$x = \frac{q}{1 - p + q}$$

が得られる。先ほどの例では $x = 5/7 (\doteq 0.7143)$ である。

別の例を考えてみよう。2 人の雷様が晴れか雨かを決めている。2 人は 1 度晴れたら原則としてそのまま晴れを続け、1 度雨が降ったらそのまま雨の日を続けると決めている。しかし、時たまそれぞれ気紛れを起こしてルールを守らないことがある。1 人 1 人が気紛れを起こす確率を ε で表す。また、晴れた日の翌日に雨になるには 2 人が同時に気紛れを起こさなければならないが、逆に雨が降った日の翌日に晴れるには 1 人または 2 人が気紛れを起こせばよいものとする。すると晴れた日の翌日に雨になる確率は ε^2 （晴れる確率は $1 - \varepsilon^2$ ）、雨の日の翌日に晴れる確率は $2\varepsilon - \varepsilon^2$ （雨が降る確率は $(1 - \varepsilon)^2$ ）となる。(1) 式に当てはめると $p = 1 - \varepsilon^2$ 、 $q = 2\varepsilon - \varepsilon^2$ であるから

$$x = \frac{2\varepsilon - \varepsilon^2}{2\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

が得られる。一方定常分布において雨が降る確率は

$$1 - x = \frac{\varepsilon}{2}$$

である。たとえば $\varepsilon = 0.1$ であるとする $x = 0.95$, $\varepsilon = 0.01$ であれば $x = 0.995$ というように ε が小さくなると x すなわち晴れる確率は 1 に近づいて行く。つまり、雷様が気紛れを起こす確率が非常に小さい場合、晴れから始まっても雨から始まっても長い時間の経過の中ではほとんどの日が晴れることになる。このような場合「晴れ」という状態は「確率的に安定な状態 (stochastically stable state)」であると言う。気紛れを進化論にならって「突然変異」と呼ぶことにする。

今の例では晴れた日の翌日に 1 人の雷様が突然変異を起こしても晴れのままであると仮定したが、もう少しモデルを広げてそのような場合には曇りになると考えてみよう。詳しく言えば、2 人の雷様はそれぞれ晴れまたは雨を選び、2 人の選択が一致すればその天候が実現し、一致しなければ (1 人が晴れ、1 人が雨を選ぶ) 曇りになると仮定する。また、突然変異を含まない選択の変化を次のように仮定する。

- (1) 晴れの翌日は 2 人とも晴れを選び天候は晴れになる。
- (2) 曇りの翌日は 2 人とも晴れを選び天候は晴れになる。
- (3) 雨の翌日は 2 人とも雨を選び天候は雨になる。

一方突然変異は、それによって各自が本来選ぶべき選択とは異なる選択をすることになるので次のような影響を及ぼす。

- (1) 晴れまたは曇りの翌日は 2 人とも晴れを選ぶべきなので、1 人だけが突然変異を起こせば天候は曇りになり、2 人とも起こせば雨になる。
- (2) 雨の翌日は 2 人とも雨を選ぶべきなので、1 人だけが突然変異を起こせば天候は曇りになり、2 人とも起こせば晴れになる。

後の結果にとって重要なポイントは、突然変異が連続して起きなければ曇りの日は続かず翌日は必ず (雨ではなく) 晴れになるということである。

以上の仮定のもとで 1 人 1 人が突然変異を起こす確率を ε とすると、天候が移り行く確率は次のようになる。

- (1) 晴れた日または曇りの日の翌日に晴れる確率は $(1 - \varepsilon)^2$, 曇る確率は $2\varepsilon(1 - \varepsilon)$, 雨が降る確率は ε^2 。
- (2) 雨の日の翌日に晴れる確率は ε^2 , 曇る確率は $2\varepsilon(1 - \varepsilon)$, 雨が降る確率は $(1 - \varepsilon)^2$ 。

ある日に晴れる確率を x , 雨が降る確率を y とすると (曇る確率は $1 - x - y$ である) 定常分布においてはこれらの値が変化しないので次の式が得られる。

$$(1 - \varepsilon)^2 x + (1 - \varepsilon)^2 (1 - x - y) + \varepsilon^2 y = (1 - \varepsilon)^2 (1 - y) + \varepsilon^2 y = x$$

$$\varepsilon^2 x + \varepsilon^2 (1 - x - y) + (1 - \varepsilon)^2 y = \varepsilon^2 (1 - y) + (1 - \varepsilon)^2 y = y$$

これらを解くと

$$x = \frac{2 - 5\varepsilon + 4\varepsilon^2}{2}, y = \frac{\varepsilon}{2}$$

が得られ、したがって定常分布において曇る確率は

$$1 - x - y = 2\varepsilon(1 - \varepsilon)$$

となる。例えば ε が 0.01 であるとする、 $x = 0.9752$, $y = 0.005$, $1 - x - y = 0.0198$ となり、さらに ε を小さくして行くと x が 1 に近づく一方、 y と $1 - x - y$ はゼロに近づいて行く。したがって晴れのみが確率的に安定な状態である。

晴れが確率的に安定になる理由を考えてみよう。突然変異が起きる確率が低いとしても長い時間が経過する内にはいずれは起きるからどの状態から始まったかは長期的な状況の推移には関係がない。状態が雨から始まったとすると、1つの突然変異で曇りに移りさらに突然変異なしで晴れに移る。その後は2つの突然変異が重ならなければ雨にはならない。その確率は1つの突然変異が起きる確率が十分に小さければ無視できるほどである。したがって長期的に見て晴れに比べて雨が実現する確率はほとんど無視できる。一方晴れからは1つの突然変異で曇りに移るが、突然変異が続いて起きなければすぐに晴れに戻る。したがって長期的に曇りが実現する確率もほとんど無視できるのである。

次の節では以上の議論を寡占の進化ゲーム的分析に応用する。

2 寡占の確率的に安定な状態：複占の場合

企業数が2つの寡占、いわゆる複占について以下のようなモデルを考える。

- (1) 2つの企業（企業1と企業2と呼ぶ）は同質的な財を生産し、その需要関数は財の価格を p 、各企業の産出量を q_1, q_2 として

$$p = 12 - (q_1 + q_2)$$

で表される。

- (2) 話を簡単にするため生産に費用はかからないものとする。
- (3) さらに話を簡単にするために、企業は競争的（ワルラス的）な均衡における産出量（「競争的産出量」と呼ぶ）とクールノー均衡における産出量（「クールノー産出量」と呼ぶ）のいずれかの産出量を選択すると仮定する。

競争的産出量とは両企業が等しい産出量を生産して価格と限界費用（このモデルではゼロ）が等しくなるような産出量であり、この例では $q_1 = q_2 = 6$ である。一方クールノー産出量は通常の計算によって $q_1 = q_2 = 4$ と求まる。各企業が4または6のいずれかの産出量を選ぶものとしてこの状況を戦略型ゲームで表すと次の表のようになる。

		企業2の産出量	
		4	6
企業1 の 産出量	4	16, 16	8, 12
	6	12, 8	0, 0

表 1

表に示された企業の利得はそれぞれの利潤である。容易にわかるように通常のナッシュ均衡は各企業が産出量4を選ぶ戦略の組であるが、それが確率的に安定な状態とはならない。

2つの企業はこのゲームを繰り返しプレイするのだが、進化ゲーム的な分析のために以下のような模倣 (imitation) にもとづく戦略の選択プロセスを考える。

- (1) 各企業は需要関数の形を知らず相手の産出量に対する自らの最適反応を計算することはできない。
- (2) 各企業は自らおよび相手が各時点において選択した産出量と得られた利潤を観察することができる。また両企業が同じタイプ（費用がゼロ）であることを知っている。
- (3) 各企業はある時点における自らの利潤が相手の利潤より大きい（当然選んだ戦略は互いに異なる）場合には以下で述べる突然変異以外で戦略を変更することはない。また、ある時点で2つの企業が同一の戦略を選んでいった場合（この場合2つの企業の利潤は等しい）にも戦略を変更することはない。すなわち次の時点においてもそれまでと同じ戦略を選ぶ。一方相手の利潤が自らの利潤より大きい場合（この場合にも各企業が選んだ戦略は互いに異なる）には、利潤の小さい企業は利潤の大きい企業が選んだ戦略に厳密に正の確率で変更する可能性がある。ここではそのような場合は常に（確率1で）戦略を変更するものと仮定する。
- (4) 上で述べた利潤の比較による戦略の選択とは別に、各企業は各時点においてある確率で本来選ぶべき戦略とは異なる戦略を、何かの間違い、気紛れ、あるいは実験的に選ぶ可能性がある。これを「突然変異」を呼ぶことにし、そのような行動をとる確率を ε で表す。

模倣による戦略の選択プロセスは、より環境に適応した戦略、この場合にはより大きい利潤を得ることができる戦略が生き残るという意味でダーウィンの自然淘汰（natural selection）の考え方に沿ったものであり、企業が需要関数の形を知らないという設定のもとにおいては理にかなったモデルであると考えられる。

企業1が産出量4を企業2が6を選ぶ状態と、逆に企業2が産出量4を企業1が6を選ぶ状態とを区別せずに1つの状態として扱えば、起こり得る状態は両企業がともに産出量4を選ぶ状態（状態Cと呼ぶ）、ともに産出量6を選ぶ状態（状態Wと呼ぶ）、そして一方の企業が4を他方が6を選ぶ状態（状態Aと呼ぶ）の3つである。状態Aにおいては4を選んだ企業よりも6を選んだ企業の方がより大きい利潤を得ることができる。上記のような突然変異を含む戦略の選択プロセスを仮定すると、ある時点から次の時点へ状態が移行する確率は次のようになる。

- (1) 状態Wがそのまま変わらない確率は $(1-\varepsilon)^2$ 、状態Aに移る確率は $2\varepsilon(1-\varepsilon)$ 、状態Cに移る確率は ε^2
- (2) 状態Aから状態Wに移る確率は $(1-\varepsilon)^2$ 、そのまま変わらない確率は $2\varepsilon(1-\varepsilon)$ 、状態Cに移る確率は ε^2
- (3) 状態Cがそのまま変わらない確率は $(1-\varepsilon)^2$ 、状態Aに移る確率は $2\varepsilon(1-\varepsilon)$ 、状態Wに移る確率は ε^2

このプロセスは前節で説明した晴れ、曇り、雨の3つの状態からなる天候の変化とまったく同じ形になっており、状態Wが晴れに、状態Aが曇りに、状態Cが雨にそれぞれ対応している。したがって ε の値が十分に小さければ状態Wすなわち両企業がともに産出量6（競争的な産出量）を選ぶ状態が確率的に安定な状態となる。

ところで、状態Wは各企業が自らの利潤と相手の利潤との差、すなわち相対的な利潤を最大化する戦略を選ぶ状態になっている。表1を相対的な利潤を利得として書き直してみると表2のようになる。このゲームのナッシュ均衡は各企業が競争的な産出量6を選ぶ状態である。

		企業 2 の産出量	
企業 1		4	6
の	4	0, 0	-4, 4
産出量	6	4, -4	0, 0

表 2

3 寡占の確率的に安定な状態：より一般的な場合

前節では企業数が 2 つの場合を考えたが、企業数が多くかつ産出量の選択肢が 2 つに限られないより一般的な寡占の場合にも同様の議論が成り立つ。モデルは少々複雑になるが本質は同じである。要点を確認してみよう。産出量の選択肢が多いとは言っても無数にあっては困るので、ある有限の定数 δ の整数倍の産出量のみが選択可能で、その中には以下で述べる競争的な産出量が含まれているものとする。またいくつかの企業が異なる産出量を選んでいる状態（「非対称な状態」と呼ぶ）において、1 つまたは複数の産出量が最大の利潤をもたらしている場合、次の時点においてすべての企業が同一の産出量を選ぶという状態が厳密に正の確率で起きるものと仮定する³。

ある産業において $n(n \geq 3)$ 社の企業が同質的な財を費用ゼロで生産しているものとし、各企業の産出量を $q_i (i = 1, 2, \dots, n)$ で表して次のような需要関数を仮定する。

$$p = a - (q_1 + q_2 + \dots + q_n), \quad a > 0$$

このとき競争的な産出量 q_w は $\frac{a}{n}$ 、クールノー的な産出量 q_c は $\frac{a}{n+1}$ である。

ある時点においてすべての企業が q_w とは異なる共通の産出量 q を選んでいたと仮定し（そのような状態を状態 q と呼ぶ）、その次の時点で 1 つの企業（企業 1 とする）が q_w を選んだとすると、企業 1 の利潤は

$$\pi_1 = [a - (n-1)q - \frac{a}{n}] \frac{a}{n} = (n-1) \left(\frac{a}{n} - q \right) \frac{a}{n}$$

一方他の企業の利潤は

$$\pi_{-1} = [a - (n-1)q - \frac{a}{n}] q = (n-1) \left(\frac{a}{n} - q \right) q$$

となる。その差を求めると

$$\pi_1 - \pi_{-1} = (n-1) \left(\frac{a}{n} - q \right)^2$$

が得られる。これは q と $\frac{a}{n} (= q_w)$ とが異なる限り正である。したがってすべての企業が q_w とは異なるある産出量を選んでいる状態において、1 つの企業が突然変異によって q_w を選ぶとその企業の利潤が他の企業の利潤よりも大きくなり、その後突然変異なしですべての企業が q_w を選ぶ状態（そのような状態を状態 W と呼ぶ）に移る。

逆にある時点においてすべての企業が q_w を選んでいたとして、次の時点で 1 つの企業（企業 2 とする）が他の産出量 q を選んだとき、企業 2 の利潤は

$$\pi_2 = [a - (n-1) \frac{a}{n} - q] q = \left(\frac{a}{n} - q \right) q$$

一方他の企業の利潤は

$$\pi_{-2} = [a - (n-1) \frac{a}{n} - q] \frac{a}{n} = \left(\frac{a}{n} - q \right) \frac{a}{n}$$

となる。その差を求めると

$$\pi_2 - \pi_{-2} = -\left(\frac{a}{n} - q\right)^2$$

が得られる。これは q と $\frac{a}{n}(=q_w)$ とが異なる限り負である。したがってすべての企業が q_w を選んでいる状態において1つの企業が突然変異によって q_w とは異なる産出量を選んでも、その企業の利潤は他の企業の利潤よりも小さくなり、その後突然変異なしでもとの状態 W に戻る。

状態 q から始まったとすると1つの突然変異で非対称な状態に移り、さらに突然変異なしで状態 W に移る。これはすべての状態 q について成り立つ。一方、状態 W からは1つの突然変異で非対称な状態になるがその後は突然変異なしですぐもとに戻るから、状態 W において少なくとも2つの突然変異が同時に起きなければ状態 q には移らない。したがって状態 W と比べて状態 q が実現する確率は長期的に無視できるものである。今述べたように状態 W から1つの突然変異で非対称な状態に移るが、突然変異が連続しなければすぐもとに戻るので非対称な状態が実現する確率も長期的に無視できるから、この一般的なケースにおいてもすべての企業が競争的な産出量を選ぶ状態が確率的に安定な状態である。

4 おわりに

以上、同質的な財を生産する寡占において企業数が2つ以上あればすべての企業が競争的な行動をとる状態が進化ゲームにおける確率的に安定な状態になることを示した。筆者自身はこの議論を差別化された財を生産する寡占に応用して、産出量を戦略変数とするクールノー的な寡占における確率的に安定な状態と、価格を戦略変数とするベルトラン的な寡占における確率的に安定な状態とが一致することを明らかにした⁴。

注

¹本稿の内容は主に F. Vega-Redondo, “The Evolution of Walrasian Behavior.” *Econometrica* Vol. 67 (1997), pp. 375-384 にもとづく。

²厳密にはそれ以上変化しない分布が定常分布で、変化の行き着く先が極限分布であるが、本稿で扱うマルコフ連鎖の場合両者は等しい。

³異なる産出量を選んでいる複数の企業が最大の利潤を得ている場合に、それらの企業が他の最大の利潤を得ている企業が選んだ自らの産出量とは異なる産出量に変更する可能性があると仮定する。そう仮定しなくても同じ結論が得られるが議論は少々複雑になる。詳しくは F. Vega-Redondo(1997) を参照していただきたい。

⁴「寡占の進化ゲーム的分析：価格アプローチと数量アプローチの同値性」、経済研究（岩波書店）、Vol.49, 1998 や “Stochastically stable states in an oligopoly with differentiated goods: Equivalence of price and quantity strategies”, *Journal of Mathematical Economics*, Vol.34, North-Holland, 2000 などを参照していただきたい。