$\boxed{\text{ラプラシアンの極座標表示の求め方（力技）}}$ ベクトル演算子（grad や div）を忘れても，偏微分だけできれば OK.

(x,y,z)と(r,θ,ϕ)の関係は，$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \tan\phi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$ －①，または $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ である．

まず偏微分の公式を用いると，x, y, z の偏微分は r, θ, ϕ の関数として次のように書ける．

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \phi} \qquad -② \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}$$

②の係数（$\dfrac{\partial r}{\partial x}$ など）は定義式①を両辺 x, y, z で偏微分し，r, θ, ϕ で表して求める．例えば x の場合，

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sin\theta\cos\phi, \quad -\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{xz}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}$$

$\dfrac{1}{\cos^2\phi}\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2} \Rightarrow \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = -\dfrac{\sin\phi}{r\sin\theta}$ などとなる．y,z についても計算して，それらを②に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \qquad -③ \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

となる．次に，2 次偏微分を求める．例えば $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ の場合，$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$を計算すればよいので，③の第一式から

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right) + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right) \\ &- \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right) \end{aligned}$$

ここで，例えば第一項は r による偏微分なので，r の関数とそうでないものを分ければよい．すると，

$$\text{右辺第一項} = \sin\theta\cos\phi\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\cos\theta\cos\phi}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial \theta} + \frac{\sin\phi}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial \phi}\right)$$

などとなる．計算はかなり大変（そういう意味でベクトル演算子を勉強した方が楽かも）であるが，丁寧に順番に計算する．同じように $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ も計算する．そうしてそれらを全て加えればラプラシアン（Δ）が求められる．多くの項が打ち消し合ったり，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$などで簡単になるのが分かるはず．結局，

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \qquad -④$$

となる（はず）. 各自で確認すること！！④式はテキスト III(6.28)式を展開した形と同じであることが分かる．