

Socially optimal residence

宮澤和俊*

1 はじめに

2 地域, 2 期間世代重複モデルを用いて, 社会的に最適な人口配分と消費配分を調べる.

2 社会的最適

社会厚生関数を次式で定義する.

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [\theta_t u(c_{1t}, c_{2t+1}) + (1 - \theta_t) u^o(c_{1t}^o, c_{2t+1}^o)] \quad (1)$$

c_{1t}, c_{2t+1} は, urban に住む世代 t の若年期消費, 高齢期消費を表す. c_{1t}^o, c_{2t+1}^o は, rural に住む世代 t の若年期消費, 高齢期消費を表す. $u(\cdot, \cdot), u^o(\cdot, \cdot)$ は urban, rural の効用関数である. $0 \leq \theta_t \leq 1$ は, urban の住民に対する t 期の厚生ウェイトを表す. $0 < \delta < 1$ は社会的割引要素である.

人口制約, 資源制約はそれぞれ次式で与えられる.

$$N_t + N_t^o = \bar{N} \quad (2)$$

$$F(K_t, N_t(1 - \varepsilon)) + BN_t^o = N_t c_{1t} + N_t^o c_{1t}^o + N_{t-1} c_{2t} + N_{t-1}^o c_{2t}^o + K_{t+1} \quad (3)$$

N_t, N_t^o はそれぞれ, t 期の urban の人口と rural の人口を表す. 総人口 \bar{N} は一定であると仮定する.

urban では, 資本 K_t と労働を用いて生産をおこなう. urban の住民は, $(1 - \varepsilon)$ 単位の労働を供給する. $0 < \varepsilon < 1$ は, urban cost を表す定数である. (3) 式の左辺第 1 項の $F(\cdot, \cdot)$ が urban の生産関数を表す.

rural では労働のみを用いて財を生産する. rural の住民は 1 単位の労働を供給し, B 単位の生産物を得る. (3) 式の左辺第 2 項が rural の生産関数を表す. (3) 式の左辺は生産国民所得を表し, 右辺は支出国民所得を表す.

以下, 1 人あたり変数を用いる. t 期の urban population ratio を,

$$\rho_t = \frac{N_t}{\bar{N}}$$

とおく. rural population ratio は, $\rho_t^o = N_t^o / \bar{N} = 1 - \rho_t$ である.

urban output を $Y_t = F(K_t, N_t(1 - \varepsilon))$ とおく. 規模に関して収穫一定であるとき, 1 人あたり output は, $y_t = Y_t / \bar{N} = F(k_t, \rho_t(1 - \varepsilon)) \equiv f(k_t, \rho_t)$ と表せる. ただし, $k_t = K_t / \bar{N}$ は 1 人あたり資本を表す.

最適化問題は, 次のように定式化できる.

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [\theta_t u(c_{1t}, c_{2t+1}) + (1 - \theta_t) u^o(c_{1t}^o, c_{2t+1}^o)]$$

subject to

$$\rho_t + \rho_t^o = 1 \quad (4)$$

$$f(k_t, \rho_t) + B\rho_t^o = \rho_t c_{1t} + \rho_t^o c_{1t}^o + \rho_{t-1} c_{2t} + \rho_{t-1}^o c_{2t}^o + k_{t+1} \quad (5)$$

*Faculty of Economics, Doshisha Univeristy, Kamigyō, Kyoto 602-8580 Japan. kazu@mail.doshisha.ac.jp

ラグランジュ関数を,

$$L_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \{ \theta_t u(c_{1t}, c_{2t+1}) + (1 - \theta_t) u^o(c_{1t}^o, c_{2t+1}^o) + \pi_t (1 - \rho_t - \rho_t^o) \\ + \lambda_t [f(k_t, \rho_t) + B\rho_t^o - \rho_t c_{1t} - \rho_t^o c_{1t}^o - \rho_{t-1} c_{2t} - \rho_{t-1}^o c_{2t}^o - k_{t+1}] \}$$

とおく. π_t, λ_t はラグランジュ乗数である.

$c_{1t}, c_{2t+1}, c_{1t}^o, c_{2t+1}^o, \rho_t, \rho_t^o, k_{t+1}$ に関する 1 階の条件は, 順に次式で与えられる.

$$\theta_t \frac{\partial u_t}{\partial c_{1t}} - \lambda_t \rho_t = 0 \quad (6)$$

$$\theta_t \frac{\partial u_t}{\partial c_{2t+1}} - \delta \lambda_{t+1} \rho_t = 0 \quad (7)$$

$$(1 - \theta_t) \frac{\partial u_t^o}{\partial c_{1t}} - \lambda_t \rho_t^o = 0 \quad (8)$$

$$(1 - \theta_t) \frac{\partial u_t^o}{\partial c_{2t+1}^o} - \delta \lambda_{t+1} \rho_t^o = 0 \quad (9)$$

$$-\pi_t + \lambda_t [f_\rho(k_t, \rho_t) - c_{1t}] - \delta \lambda_{t+1} c_{2t+1} = 0 \quad (10)$$

$$-\pi_t + \lambda_t (B - c_{1t}^o) - \delta \lambda_{t+1} c_{2t+1}^o = 0 \quad (11)$$

$$-\lambda_t + \delta \lambda_{t+1} f_k(k_{t+1}, \rho_{t+1}) = 0 \quad (12)$$

(6), (7), (12) 式および, (8), (9), (12) 式より,

$$MRS_t = f_k(k_{t+1}, \rho_{t+1}) \quad (13)$$

$$MRS_t^o = f_k(k_{t+1}, \rho_{t+1}) \quad (14)$$

が成り立つ. ただし,

$$MRS_t = \frac{\partial u_t / \partial c_{1t}}{\partial u_t / \partial c_{2t+1}} \\ MRS_t^o = \frac{\partial u_t^o / \partial c_{1t}^o}{\partial u_t^o / \partial c_{2t+1}^o}$$

である.

他方, (10), (11), (12) 式より,

$$f_\rho(k_t, \rho_t) - c_{1t} - \frac{c_{2t+1}}{f_k(k_{t+1}, \rho_{t+1})} = B - c_{1t}^o - \frac{c_{2t+1}^o}{f_k(k_{t+1}, \rho_{t+1})} \quad (15)$$

が成り立つ.

t 期の urban consumption (c_{1t}) を 1 単位減らして投資に回すと, $(t+1)$ 期の urban consumption (c_{2t+1}) を $f_k(k_{t+1}, \rho_{t+1})$ 単位増やすことができる. t 期の urban consumption 1 単位は, $(t+1)$ 期の urban consumption MRS_t 単位と等価である. したがって, (13) 式の右辺は $(t+1)$ 期の urban consumption で測った限界便益を表し, 左辺は限界費用を表している. (13) 式は, 限界便益と限界費用が一致する水準で urban consumption が配分されることを意味する. (14) 式は, rural consumption についても同様の基準で配分されることを意味する.

(15) 式の左辺は, urban population のネットの限界便益を表す. 第 1 項の f_ρ は追加的な urban output を表しており, 第 2 項と第 3 項は, urban population の消費の割引現在価値を表す. 同様に, 右辺は rural population のネットの限界便益を表す. 左辺の値が右辺より大きいとき, rural から urban に移住させるのが社会的に望ましい. (15) 式は, これ以上移住によって便益を増やすことができないことを意味する.

3 特定化

本節では効用関数と生産関数を特定化し，社会的最適解を導出する．
urban, rural の効用関数は同一であり，

$$u_t = (1 - \beta) \ln c_{1t} + \beta \ln c_{2t+1}$$

とする．

urban の生産関数を，

$$Y_t = AK_t^\alpha [N_t(1 - \varepsilon)]^{1-\alpha}$$

とする．1人あたりでは，

$$y_t = Ak_t^\alpha [\rho_t(1 - \varepsilon)]^{1-\alpha}$$

である．このとき，

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_t}{\partial k_t} &= \alpha \frac{y_t}{k_t} \\ \frac{\partial y_t}{\partial \rho_t} &= (1 - \alpha) \frac{y_t}{\rho_t} \end{aligned}$$

が成り立つ．

(6), (7), (8), (9) 式より，

$$\rho_t c_{1t} = \frac{(1 - \beta)\theta_t}{\lambda_t} \quad (16)$$

$$\rho_t c_{2t+1} = \frac{\beta\theta_t}{\delta\lambda_{t+1}} \quad (17)$$

$$\rho_t^\circ c_{1t}^\circ = \frac{(1 - \beta)(1 - \theta_t)}{\lambda_t} \quad (18)$$

$$\rho_t^\circ c_{2t+1}^\circ = \frac{\beta(1 - \theta_t)}{\delta\lambda_{t+1}} \quad (19)$$

(12) 式より，

$$\lambda_t = \delta\alpha\lambda_{t+1} \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} \quad (20)$$

(16)-(19) 式を (5) 式に代入し，整理する．

$$\lambda_t(y_t + B\rho_t^\circ) = 1 - \beta + \frac{\beta}{\delta} + \delta\alpha\lambda_{t+1}y_{t+1} \quad (21)$$

他方，(10), (11) 式で π_t を消去する．

$$\lambda_t \left[(1 - \alpha) \frac{y_t}{\rho_t} - c_{1t} \right] - \delta\lambda_{t+1}c_{2t+1} = \lambda_t (B - c_{1t}^\circ) - \delta\lambda_{t+1}c_{2t+1}^\circ \quad (22)$$

(16)-(19) 式を (22) 式に代入し，整理する．

$$\frac{(1 - \alpha)\lambda_t y_t - \theta_t}{\rho_t} = \frac{B\lambda_t \rho_t^\circ - (1 - \theta_t)}{\rho_t^\circ} \quad (23)$$

(21), (23) 式を用いて， $\lambda_t \rho_t^\circ$ を消去すると， $\lambda_t y_t$ の1次の差分方程式を得る．

$$\left[1 + (1 - \alpha) \frac{\rho_t^\circ}{\rho_t} \right] \lambda_t y_t = 1 - \beta + \frac{\beta}{\delta} - \left(1 - \theta_t - \theta_t \frac{\rho_t^\circ}{\rho_t} \right) + \delta\alpha\lambda_{t+1}y_{t+1} \quad (24)$$

厚生ウェイトが時間を通じて一定であるとする ($\theta_t = \theta$)．さらに，rural-urban population ratio ρ_t°/ρ_t が一定であると仮定する．

$$\frac{\rho_t^\circ}{\rho_t} = z$$

このとき (24) 式から得られる定常均衡 $\lambda_t y_t$ は一意であり、かつ不安定である。したがって、瞬時に定常均衡に調整される。

$$\lambda_t y_t = \frac{1 - \beta + \frac{\beta}{\delta} - (1 - \theta - \theta z)}{1 - \delta\alpha + (1 - \alpha)z} \quad (25)$$

(25) 式を (21) 式に代入すると、

$$\lambda_t B \rho_t^o = \frac{\left(1 - \beta + \frac{\beta}{\delta}\right) (1 - \alpha)z + (1 - \delta\alpha) (1 - \theta - \theta z)}{1 - \delta\alpha + (1 - \alpha)z} \quad (26)$$

(25), (26) 式より, rural-urban output ratio を得る。

$$\frac{B \rho_t^o}{y_t} = \frac{\left(1 - \beta + \frac{\beta}{\delta}\right) (1 - \alpha)z + (1 - \delta\alpha) (1 - \theta - \theta z)}{1 - \beta + \frac{\beta}{\delta} - (1 - \theta - \theta z)} \quad (27)$$

以下, z の値を求めるために, urban output の定常値を求める。(20) 式と $\lambda_t y_t$ の定常性より,

$$\lambda_t k_{t+1} = \delta\alpha \lambda_{t+1} y_{t+1} = \delta\alpha \lambda_t y_t$$

したがって、

$$k_{t+1} = \delta\alpha y_t = \delta\alpha A k_t^\alpha [\rho_t (1 - \varepsilon)]^{1-\alpha}$$

$k_{t+1} = k_t$ とおくと、

$$\begin{aligned} k_t &= (\delta\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}} \rho_t (1 - \varepsilon) \\ y_t &= A (\delta\alpha A)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \rho_t (1 - \varepsilon) \end{aligned} \quad (28)$$

が得られる。

最後に, (28) 式を (27) 式に代入すると, z の方程式が得られる。

$$\frac{Bz}{A(\delta\alpha A)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1 - \varepsilon)} = \frac{\left(1 - \beta + \frac{\beta}{\delta}\right) (1 - \alpha)z + (1 - \delta\alpha) (1 - \theta - \theta z)}{1 - \beta + \frac{\beta}{\delta} - (1 - \theta - \theta z)} \quad (29)$$

(4) 式より, Urban ratio, rural ratio の定常値は, それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{1+z} \\ \rho^o = \frac{z}{1+z} \end{cases}$$

4 数値例

資本の生産弾力性を $\alpha = 1/3$ とする。TFP を $A = 1, B = 1$ とする。

私的割引率を年率 1% とする。1 期 30 年とすると, $\beta = 0.426$

社会的割引率を年率 1% とする。 $\delta = 0.742$

厚生ウェイトを $\theta = 0.5$ とする。

urban cost を $\varepsilon = 0.1$ とする。

Note. Annual discount rate is 1%.

$$\frac{\beta}{1 - \beta} = 1.01^{-30} = 0.742$$

Figure 1 は, ヨコ軸を人口比 $z = \rho^o / \rho$ として, (29) 式の左辺と右辺を図示したものである。原点を通る直線が左辺を表し, 右上がりの曲線が右辺を表す。均衡人口比は $z^* = 0.275$, つまり, $\rho = 0.784, \rho^o = 0.216$ である。8 割弱が urban に住み, 2 割強が rural に住むのが社会的に望ましい。

Figure 1. rural/urban ratio ($z = \rho^o/\rho$)

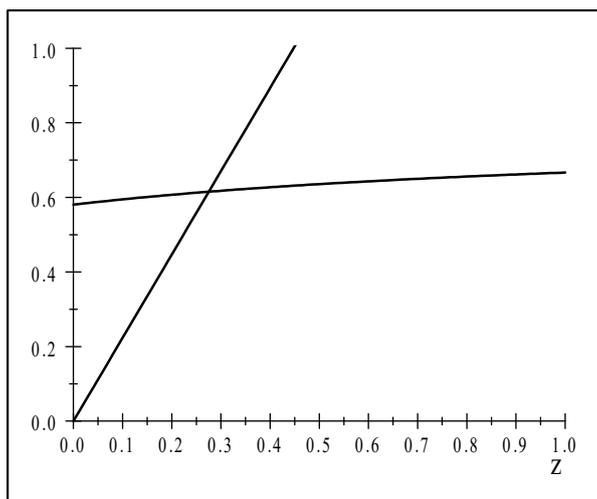


Table 1 は，定常均衡における資源配分を表している．便宜上，urban output を 1 に基準化している．rural output は，urban output の約 6 割である．マクロの投資率は約 15% である (247/1615)．本稿の設定では，4 タイプの個人消費は総額でみて一致する．

Table 1. Resource allocation

Urban output	y_t	1
Rural output	$B\rho_t^o$	0.615
Urban young	$\rho_t c_{1t}$	0.342
Rural young	$\rho_t^o c_{1t}^o$	0.342
Urban old	$\rho_{t-1} c_{2t}$	0.342
Rural old	$\rho_{t-1}^o c_{2t}^o$	0.342
Investment	k_{t+1}	0.247

5 おわりに