2階の条件

宮澤和俊

大学院「家族の経済学」の補足

1　1変数関数

1.1　多項式近似（テーラー展開）

関数 $y = f(x)$ を，$x = 0$ の近傍で，多項式で近似する．

0 次近似

$$y = f(0)$$

点 $(0, f(0))$ を通る水平線を表す.

1 次近似

$$y = A + Bx$$

とおく．$f(0) = A$, $f'(0) = B$ より，

$$y = f(0) + f'(0)x$$

点 $(0, f(0))$ における接線を表す.

2 次近似

$$y = A + Bx + Cx^2$$

とおく．$f(0) = A$, $f'(0) = B$, $f''(0) = 2C$ より，

$$y = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 \tag{1}$$

点 $(0, f(0))$ で接する放物線を表す.

次に，関数 $y = f(x)$ を，$x = a$ の近傍で，多項式で近似する．
0 次近似

$$y = f(a)$$

点 $(a, f(a))$ を通る水平線を表す.

1 次近似

$$y = A + Bx$$

とおく．$f(a) = A + Ba$, $f'(a) = B$ より，

$$B = f'(a)$$
$$A = f(a) - f'(a)a$$

したがって，

$$y = f(a) - f'(a)a + f'(a)x = f(a) + f'(a)(x - a)$$

点 $(a, f(a))$ における接線を表す.

2 次近似

$$y = A + B(x-a) + C(x-a)^2$$

とおく．$f(a) = A$, $f'(a) = B$, $f''(a) = 2C$ より，

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 \tag{2}$$

点 $(a, f(a))$ で接する放物線を表す.

［別解］曲線 $y = f(x)$ を左に a だけ平行移動する．曲線の式は,

$$y = f(x+a) \equiv g(x)$$

$x = 0$ の近傍で 2 次近似する．(1) 式より,

$$\begin{aligned} y &= g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(0)x^2 \\ &= f(a) + f'(a)x + \frac{1}{2}f''(a)x^2 \end{aligned}$$

この放物線を右に a だけ平行移動する.

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

これが求める 2 次関数.

1.2 極大

関数 $y = f(x)$ が，$x = 0$ で極大値をとるとする．(1) 式の放物線が上に凸であればよい．したがって，極大であるための必要条件（2 階の条件）は,

$$f''(0) < 0$$

である.

関数 $y = f(x)$ が，$x = a$ で極大値をとるとする．(2) 式を用いると，2 階の条件は,

$$f''(a) < 0$$

である.

2 2 変数関数

2.1 多項式近似（テーラー展開）

2 変数関数 $z = f(x, y)$ を，$(x, y) = (0, 0)$ の近傍で，2 変数多項式で近似する.

0 次近似

$$z = f(0, 0)$$

空間内の点 $(0, 0, f(0, 0))$ を通る，(x, y) 平面と平行な平面を表す.

1 次近似

$$z = A + Bx + Cy$$

とおく．$f(0,0)=A,\ f_x(0,0)=B,\ f_y(0,0)=C$ より，

$$z=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y$$

空間内の点 $(0,0,f(0,0))$ における接平面を表す.

2 次近似

$$z=A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Fy^2$$

とおく．$f(0,0)=A,\ f_x(0,0)=B,\ f_y(0,0)=C,\ f_{xx}(0,0)=2D,\ f_{xy}(0,0)=E,\ f_{yy}(0,0)=2F$ より，

$$z=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+\frac{1}{2}\left[f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\right] \tag{3}$$

空間内の点 $(0,0,f(0,0))$ で接する 2 次曲面を表す.

次に，2 変数関数 $z=f(x,y)$ を，$(x,y)=(a,b)$ の近傍で，2 変数多項式で近似する．

0 次近似

$$z=f(a,b)$$

1 次近似

$$z=A+B(x-a)+C(y-b)$$

とおく．$f(a,b)=A,\ f_x(a,b)=B,\ f_y(a,b)=C$ より，

$$z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

2 次近似

$$z=A+B(x-a)+C(y-b)+D(x-a)^2+E(x-a)(y-b)+F(y-b)^2$$

とおく．$f(a,b)=A,\ f_x(a,b)=B,\ f_y(a,b)=C,\ f_{xx}(a,b)=2D,\ f_{xy}(a,b)=E,\ f_{yy}(a,b)=2F$ より，

$$\begin{aligned}z&=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)\\&\quad+\frac{1}{2}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right]\end{aligned} \tag{4}$$

［別解］曲面 $z=f(x,y)$ を x 方向に $-a$，y 方向に $-b$ 平行移動する．曲面の式は,

$$z=f(x+a,y+b)\equiv g(x,y)$$

$(x,y)=(0,0)$ の近傍で 2 次近似する．(3) 式より，

$$\begin{aligned}z&=g(0,0)+g_x(0,0)x+g_y(0,0)y+\frac{1}{2}\left[g_{xx}(0,0)x^2+2g_{xy}(0,0)xy+g_{yy}(0,0)y^2\right]\\&=f(a,b)+f_x(a,b)x+f_y(a,b)y+\frac{1}{2}\left[f_{xx}(a,b)x^2+2f_{xy}(a,b)xy+f_{yy}(a,b)y^2\right]\end{aligned}$$

この 2 次曲面を，x 方向に a，y 方向に b 平行移動する.

$$\begin{aligned}z&=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)\\&\quad+\frac{1}{2}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right]\end{aligned}$$

これが求める 2 次曲面.

2.2 極大

(3) 式の 2 次曲面

$$z = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2$$

が，$(x, y) = (0, 0)$ で極大値をとるための条件を求める．

x について降べきの順に整理し，平方完成する．

$$\begin{aligned} z &= Dx^2 + (B + Ey)x + A + Cy + Fy^2 \\ &= D\left(x + \frac{B + Ey}{2D}\right)^2 - \frac{(B + Ey)^2}{4D} + A + Cy + Fy^2 \end{aligned}$$

次に，第 2 項以降を y について降べきに順に整理する．

$$-\frac{(B + Ey)^2}{4D} + A + Cy + Fy^2 = \left(F - \frac{E^2}{4D}\right)y^2 + \left(C - \frac{BE}{2D}\right)y + A - \frac{B^2}{4D}$$

極大であるための必要条件（2 階の条件）は，

$$\begin{cases} D < 0 \\ F - \frac{E^2}{4D} < 0 \end{cases}$$

である．

ここで，

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} f_{xx}(0, 0) \\ E &= f_{xy}(0, 0) \\ F &= \frac{1}{2} f_{yy}(0, 0) \end{aligned}$$

であることから，

$$\begin{cases} f_{xx}(0, 0) < 0 \\ f_{xx}(0, 0) f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2 > 0 \end{cases} \tag{5}$$

が得られる．

同様にして，(4) 式の 2 次曲面が $(x, y) = (a, b)$ において極大値をとるための必要条件は，

$$\begin{cases} f_{xx}(a, b) < 0 \\ f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 > 0 \end{cases} \tag{6}$$

である．