

小国開放経済における最適な公共投資

指導教員

「財政学」第11章 公共投資 練習問題1の解答

1 モデルの設定

2期モデル, 一般均衡モデル

家計

第1期. 所得 w を, 消費 c_1 と貯蓄 s に配分する. w は定数.

第2期. 貯蓄の元利合計 $(1+r)s$ と配当 π を得る. 一括税 a を払い, c_2 だけ消費する.

企業

第1期. 民間投資 i_P をおこなう.

第2期. 民間資本 k と公共資本 g を用いて財を生産する. 利潤を配当として家計に分配する.

政府

第1期. 国債 b を発行し, 公共投資 i_G をおこなう.

第2期. 資本税と一括税を徴収し, 国債を償還する.

投資と資本

第1期の投資が, 第2期の資本になり, 生産に貢献する. タイムラグがある.

利子率

開放経済なので, 世界利子率 r (一定) のもとで自由に取引できる.

小国なので, 自国の取引は世界利子率に影響しない.

2 モデル

2.1 家計

効用関数

$$u = U(c_1, c_2)$$

c_1 第1期の消費, c_2 第2期の消費

家計予算制約式

$$w = c_1 + s \tag{1}$$

$$(1+r)s + \pi - a = c_2 \tag{2}$$

s 貯蓄, π 配当, a 一括税

(1), (2) 式で s を消去すると, 生涯の予算制約式が得られる.

$$w + \frac{\pi - a}{1+r} = c_1 + \frac{c_2}{1+r} \quad (3)$$

家計の効用最大化問題は, 次のように定式化される.

$$\max_{c_1, c_2} u = U(c_1, c_2) \quad \text{subject to} \quad w + \frac{\pi - a}{1+r} = c_1 + \frac{c_2}{1+r}$$

最適化条件

$$MRS \left(= \frac{U_1}{U_2} \right) = 1+r \quad (4)$$

(3), (4) 式より, 最適消費 c_1^*, c_2^* , および最適貯蓄 s^* が得られる.

2.2 企業

生産関数

$$y = f(k, g)$$

k 民間資本, g 公共資本

民間資本のネット・アウトプット $(y - k)$ に課税される. 税率 $0 \leq \tau < 1$ は定数.

企業の利潤最大化問題は, 次のように定式化される.

$$\max_k \pi = (1 - \tau)[f(k, g) - k] - rk \quad (5)$$

最適化条件

$$\frac{\partial \pi}{\partial k} = (1 - \tau)[f_k(k, g) - 1] - r = 0$$

より,

$$f_k(k, g) = 1 + \frac{r}{1 - \tau} \quad (6)$$

$f_{kk} < 0$ と仮定する. (6) 式の左辺は, k に関して右下がり. 右辺は水平線. 交点で資本需要 k^* が決まる.

[比較静学]

1. 世界利子率 r が上昇したとする. 水平線が上にシフトする. 交点が左上に移動する. つまり, 民間資本需要が減る ($\partial k^* / \partial r < 0$).
2. 税率 τ が上昇したとする. 水平線が上にシフトする. 交点が左上に移動する. 民間資本需要が減る ($\partial k^* / \partial \tau < 0$).
3. 公共資本 g が増えたとする. 民間資本と公共資本が補完的であるとき ($f_{kg} > 0$), f_k が上にシフトする. 交点が右に移動する. 民間資本需要が増える ($\partial k^* / \partial g > 0$).

民間資本と公共資本の間に, 補完・代替関係がないとする ($f_{kg} = 0$). g が増えても f_k は不変. 交点も不変. 民間需要は変わらない.

(6) 式の解 k^* を (5) 式に代入する. 配当は,

$$\pi = (1 - \tau)[f(k^*, g) - k^*] - rk^* \quad (7)$$

で与えられる.

2.3 政府

第1期, 第2期の政府予算制約式は, それぞれ,

$$b = i_G \quad (8)$$

$$\tau(y - k) + a = (1 + r)b \quad (9)$$

で与えられる.

(8)式は, 公共投資 i_G を, 国債 b を発行して賄うことを意味する. (9)式の右辺 $(1 + r)b$ は, 国債償還費を表す. 左辺は, 資本税収 $\tau(y - k)$ と一括税 a である.

2.4 資本蓄積

2期の民間資本と公共資本は, それぞれ,

$$k = i_P \quad (10)$$

$$g = i_G \quad (11)$$

で与えられる. 1期の投資が, 2期の資本になることを意味している.

2.5 市場均衡

国内の資本市場均衡式は,

$$s = i_P + b + F \quad (12)$$

で与えられる. 左辺の貯蓄 s が資本供給を表す. 右辺の資本需要は, 民間投資 i_P , 国債 b , 海外投資 F からなる.

世界利子率 r が一定なので, 国内供給 s と国内需要 $(i_P + b)$ が一致するとは限らない. 超過供給が生じる場合には, 海外に投資する ($F > 0$). 超過需要が生じる場合には, 逆に, 海外から資本が流入する ($F < 0$).

第1期, 第2期の財市場均衡式は, それぞれ,

$$w = c_1 + i_P + i_G + F \quad (13)$$

$$(1 + r)F + y = c_2 \quad (14)$$

で与えられる.

いずれも, 生産国民所得と支出国民所得が一致することを意味する. (13)式の左辺の w は, 第1期の国民所得を表す. 右辺の支出項目は, 最終消費支出 c_1 , 民間投資 i_P , 公共投資 i_G , そして, 海外投資 F である.

(14)式の左辺は, 国内生産 y と海外からの要素所得 $(1 + r)F$ からなる. 右辺は, 最終消費支出 c_2 である.

[ワルラス法則] (13), (14) 式は, 他の式から導出できる.

(8), (12), (1) 式を用いると, (13) 式の右辺は,

$$\begin{aligned} c_1 + i_P + i_G + F &= c_1 + i_P + b + F \\ &= c_1 + s \\ &= w \end{aligned}$$

となり, 左辺に一致する.

(2), (12), (5), (9), (10) 式を用いると, (14) 式の右辺は,

$$\begin{aligned} c_2 &= (1+r)s + \pi - a \\ &= (1+r)(i_P + b + F) + [(1-\tau)(y-k) - rk] - a \\ &= (1+r)(k+F) + y - (1+r)k \\ &= (1+r)F + y \end{aligned}$$

となり, 左辺に一致する.

2.6 均衡

i_P, i_G, b, s を消去する. 6 つの変数 $\{c_1, c_2, k, F, \pi, a\}$ に関して, 次の 6 本の式があるので解ける. 公共資本 g は外生変数である点に注意.

$$c_1 = w - k - g - F \quad (13)$$

$$c_2 = f(k, g) + (1+r)F \quad (14)$$

$$\pi = (1-\tau)[f(k, g) - k] - rk \quad (7)$$

$$a = (1+r)g - \tau[f(k, g) - k] \quad (9)$$

$$MRS = 1 + r \quad (4)$$

$$f_k(k, g) = 1 + \frac{r}{1-\tau} \quad (6)$$

3 最適な公共投資

前節の連立方程式を解くと, $c_1^* = c_1(g), c_2^* = c_2(g), k^* = k(g), F^* = F(g), \pi^* = \pi(g), a^* = a(g)$ が得られる.

間接効用関数は,

$$V(g) = U(c_1^*(g), c_2^*(g)) = U(w - k(g) - g - F(g), f(k(g), g) + (1+r)F(g)) \quad (15)$$

である.

政府は, (15) 式が最大となるように公共投資 g を決める.

(15) 式を g で微分する. 合成関数の微分法を用いると,

$$\begin{aligned} V'(g) &= U_1 \left(-\frac{dk}{dg} - 1 - \frac{dF}{dg} \right) + U_2 \left[f_k \frac{dk}{dg} + f_g + (1+r) \frac{dF}{dg} \right] \\ &= U_2 \left[f_k \frac{dk}{dg} + f_g + (1+r) \frac{dF}{dg} - \frac{U_1}{U_2} \left(1 + \frac{dk}{dg} + \frac{dF}{dg} \right) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

ここで,

$$\frac{U_1}{U_2} = 1 + r \quad (4)$$

$$f_k = 1 + \frac{r}{1 - \tau} \quad (6)$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} V'(g) &= U_2 \left[\left(1 + \frac{r}{1 - \tau}\right) \frac{dk}{dg} + f_g + (1 + r) \frac{dF}{dg} - (1 + r) \left(1 + \frac{dk}{dg} + \frac{dF}{dg}\right) \right] \\ &= U_2 \left[f_g - (1 + r) + \frac{\tau}{1 - \tau} r \frac{dk}{dg} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

と変形できる.

$U_2 > 0$ なので, (17) 式から,

$$V'(g) \geq 0 \Leftrightarrow f_g \geq 1 + r - \frac{\tau}{1 - \tau} r \frac{dk}{dg}$$

が得られる.

公共資本 g が少なく, 公共資本の限界生産力 f_g が大きいとき, g を増やすことで経済厚生が改善する. 逆は逆. 最適な公共投資は,

$$f_g(k, g) = 1 + r - \frac{\tau}{1 - \tau} r \frac{dk}{dg} \quad (18)$$

のときである.

最後に, 生産関数が加法分離的であると仮定する.

$$f(k, g) = h(k) + z(g)$$

このとき, (6) 式より,

$$f_k = h'(k) = 1 + \frac{r}{1 - \tau} \quad (19)$$

(19) 式には公共資本 g が含まれない. つまり, g が変化しても民間資本 k は不変.

$$\frac{dk}{dg} = 0 \quad (20)$$

(20) 式を (18) 式に代入すると,

$$f_g = z'(g) = 1 + r \quad (21)$$

が得られる. したがって, 民間資本と公共資本の間に代替・補完関係がないとき, 公共資本の限界生産力が世界利子率に一致する水準で公共投資をおこなうのが社会的に望ましい.

補足.

民間資本と公共資本が補完的であるときはどうなるか ($f_{kg} > 0$). 公共資本 g をヨコ軸にして, (18) 式の左辺と右辺を別々に図示する. 2 ページの比較静学にあるように, g が増えると民間資本が増える ($\partial k / \partial g > 0$). ということは, (18) 式の右辺のグラフは, 水平線 $(1 + r)$ よりも下にある. 左辺はどうか. $f_{gg} < 0$ ならば, f_g は g に関して右下がり. さらに, g が増えると k が増えるので, グラフが少し上にシフトする ($\because f_{kg} > 0$). 以上を踏まえてグラフを書く. 交点は, (21) 式の g よりも右にある. つまり, 最適な公共投資は, (21) 式の水準よりも大きくなる.