行列を用いた連立差分方程式の解法

宮澤和俊

1　行列の基礎知識

2 行 2 列の行列とは，4 つの実数を次のように配置したものを指す．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

i 行 j 列に配置された数 a_{ij} を，(i,j) 成分という（$i,j = 1,2$）．

同型の 2 つの行列 A, B の成分がすべて同じであるとき，$A = B$ とかく．

［和，差，実数倍］
同型の 2 つの行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

について，和と差を次のように定義する．

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix}$$

実数 k について，

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

と定義する．

［積］
積 AB は，2 行 2 列の行列になる．AB の (i,j) 成分を，

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j}$$

で定義する．つまり，

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

左の行列 A については，横方向に成分を取り出す．

右の行列 B については，縦方向に成分を取り出す．

取り出した成分を順に掛け合わせ，それらの和を計算する．

注意．行列の積は，一般的に，交換法則が成立しない（$AB \neq BA$）．

［単位行列とゼロ行列］

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を単位行列,

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

をゼロ行列という.

任意の行列 A について,

$$AI = IA = A$$
$$AO = OA = O$$

が成り立つ．数の世界における 1 と 0 に対応する.

［行列式と逆行列］
行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の対角線の積の差，$ad - bc$ を行列式という．$\det A$，$|A|$ などとかく.

$$\det A = ad - bc$$

ある行列 A に対して,

$$AX = XA = I$$

を満たす行列 X を，行列 A の逆行列という．A^{-1} とかく．数の世界における逆数に対応する.

すべての行列について逆行列が存在するわけではない．2 行 2 列の行列については，次の定理が知られている.

定理 1 *(i)* 行列式がゼロでないとき（$\det A \neq 0$），逆行列が存在する．逆行列は,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{1}$$

である.

(ii) 行列式がゼロのとき，逆行列は存在しない.

2　連立差分方程式

2 つの数列 $\{x_t\}, \{y_t\}$ について,

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \tag{2}$$

の関係が成り立つとする．連立差分方程式（連立 2 項間漸化式）という.

初期条件 (x_0, y_0) が与えられれば，順に，$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$ が求められる.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0 + by_0 \\ cx_0 + dy_0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax_0 + by_0 \\ cx_0 + dy_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a(ax_0 + by_0) + b(cx_0 + dy_0) \\ c(ax_0 + by_0) + d(cx_0 + dy_0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a^2 + bc)x_0 + (a + d)by_0 \\ (a + d)cx_0 + (bc + d^2)y_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

表記を簡単にするため，

$$
A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

であることから，

$$
\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \tag{3}
$$

となるはず．つまり，行列の t 乗を計算できれば，すぐに，一般項 x_t, y_t が求められる．

以下では，行列の性質を利用して，A^t を求める方法を説明する．

3　固有値と固有ベクトル

ある行列 A について，

$$
A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \tag{4}
$$

が成立するような実数 λ を，行列 A の固有値という．零ベクトルとは異なる $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ を，行列 A の固有ベクトルという．

例

$$
A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}
$$

とする．上の関係式から，

$$
\begin{pmatrix} \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}q \\ \frac{1}{2}p + \frac{3}{4}q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p \\ \lambda q \end{pmatrix}
$$

すなわち，

$$
\begin{cases} \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) p + \frac{1}{4}q = 0 \\ \frac{1}{2}p + \left(\frac{3}{4} - \lambda\right) q = 0 \end{cases}
$$

自明な解 $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解を持つためには，2 つの方程式が一致しなければならない．一致するための条件は，

$$\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{3}{4} - \lambda\right) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

である．特性方程式という．整理すると，

$$\lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{4} = 0$$

これを解くと，

$$\lambda = 1, \frac{1}{4}$$

を得る．

次に，固有ベクトルを求める．
(i) $\lambda = 1$ のとき，

$$-2p + q = 0$$

が得られる．この関係式を満たすすべての $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ が固有ベクトル．代表として，$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする．
(ii) $\lambda = \frac{1}{4}$ のとき，

$$p + q = 0$$

が得られる．代表として，

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．
まとめると，

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

が成り立つ．

［幾何学的意味］
座標平面上の点 (x, y) を，次のルールにしたがって，点 (x', y') に移動する．

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

この移動ルールを，1 次変換という．一般的には，点がどの方向に移動するのか分からないが，1 次変換には癖がある．たとえば，上の例では，点 $(1, 2)$ の移動先は点 $(1, 2)$ である．不動点という．点 $(2, 4)$ の移動先も点 $(2, 4)$ である．直線 $y = 2x$ 上の点はすべて不動点である．他方，点 $(-1, 1)$ の移動先は，点 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ である．原点方向に 1/4 倍縮小する．同じようにして，直線 $y = -x$ 上の点はすべて，原点方向に 1/4 倍縮小する．このように，特定の直線上では，原点方向の拡大や縮小という簡単なルールにしたがって点が移動する．特定の方向を示しているのが固有ベクトル，拡大・縮小の大きさを示しているのが固有値である．

4　行列の t 乗計算

前節の例を用いて，A^t を計算する．(5), (6) 式で，両辺の左から A を掛けていくと，

$$A^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$A^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}\right)^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られる．

行列の性質から，上の 2 本の式を，1 本の式にまとめることができる．

$$A^t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\left(\frac{1}{4}\right)^t \\ 2 & \left(\frac{1}{4}\right)^t \end{pmatrix} \tag{7}$$

他方，逆行列の定理から，

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列を，(7) 式の両辺の右から掛ける．左辺は $A^tI = A^t$ になる．右辺を計算すると，

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -\left(\frac{1}{4}\right)^t \\ 2 & \left(\frac{1}{4}\right)^t \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^t & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^t \\ 2-2\left(\frac{1}{4}\right)^t & 2+\left(\frac{1}{4}\right)^t \end{pmatrix} \tag{8}$$

が得られる．

(2) 式の差分方程式の解は，

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^t & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^t \\ 2-2\left(\frac{1}{4}\right)^t & 2+\left(\frac{1}{4}\right)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

である．

［一般化］

まず，行列 A の固有値 λ_1, λ_2 を求める．対応する固有ベクトルの代表を，$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$ とする．

$$A \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$$
$$A \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

これらから，

$$A^t \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = (\lambda_1)^t \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$$
$$A^t \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = (\lambda_2)^t \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

1 本にまとめると，

$$A^t \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^t p_1 & (\lambda_2)^t p_2 \\ (\lambda_1)^t q_1 & (\lambda_2)^t q_2 \end{pmatrix}$$

最後に，両辺右から，

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

を掛ける（固有ベクトルが 1 次独立ならば，逆行列は存在する）．左辺は，$A^t I = A^t$ となるので，

$$A^t = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^t p_1 & (\lambda_2)^t p_2 \\ (\lambda_1)^t q_1 & (\lambda_2)^t q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

が得られる．

注意．固有値が 1 つしかないときもある（特性方程式が重解を持つとき）．虚数解のときもある．それぞれに解法がある（ここでは省略する）．