

目的「財政学」11.2 節を解説する.

2 期モデル (第 1 期, 第 2 期)

効用関数

$$u = U(c_1, c_2)$$

$c_1$  第 1 期の消費,  $c_2$  第 2 期の消費

第 1 期, 第 2 期の資源制約式

$$w = c_1 + i_P + i_G \quad (1)$$

$$f(k, g) = c_2 \quad (2)$$

$w$  初期資源 (定数),  $i_P$  民間投資,  $i_G$  公共投資,  $k$  民間資本,  $g$  公共資本  
資本形成

$$k = i_P \quad (3)$$

$$g = i_G \quad (4)$$

(3), (4) 式を (1) 式に代入すると, 第 1 期の資源制約式は,

$$w = c_1 + k + g \quad (5)$$

と表すことができる. 以下, 文脈に応じて  $g$  のことを公共資本と呼んだり, 公共投資と呼んだりする ( $k$  も同じ).

(5) 式より, 公共投資  $g$  が増えると, 第 1 期消費  $c_1$  あるいは民間投資  $k$  が減る. 便宜上,  $c_1 = c_1(g), k = k(g)$  と表記する.

$$\frac{dc_1}{dg} \leq 0, \quad \frac{dk}{dg} \leq 0$$

(2), (5) 式を用いて,  $c_1, c_2$  を効用関数に代入し消去する.

$$u = U(w - k(g) - g, f(k(g), g)) \quad (6)$$

政府は, (6) 式が最大となるように公共資本  $g$  を決める.  $g$  で微分すると,

$$\begin{aligned} V'(g) &= U_1 \cdot \left( -\frac{dk}{dg} - 1 \right) + U_2 \cdot \left( f_k \frac{dk}{dg} + f_g \right) \\ &= U_2 \left[ f_k \frac{dk}{dg} + f_g - \frac{U_1}{U_2} \left( 1 + \frac{dk}{dg} \right) \right] \end{aligned}$$

したがって効用が最大となるのは,

$$f_g = f_k \left( -\frac{dk}{dg} \right) + \frac{U_1}{U_2} \left( 1 + \frac{dk}{dg} \right) \quad (7)$$

のときである.

他方,  $c_1 = c_1(g), k = k(g)$  を (5) 式に代入する.

$$w = c_1(g) + k(g) + g$$

この式の両辺を  $g$  で微分すると,

$$0 = \frac{dc_1}{dg} + \frac{dk}{dg} + 1 \quad (8)$$

を得る.

(8) 式を用いて (7) 式を変形する.

$$f_g = f_k \left( -\frac{dk}{dg} \right) + \frac{U_1}{U_2} \left( -\frac{dc_1}{dg} \right) \quad (9)$$

ただし,

$$\left( -\frac{dc_1}{dg} \right) + \left( -\frac{dk}{dg} \right) = 1$$

である.

(9) 式の左辺は公共投資の 限界便益 を表す. 右辺は公共投資の 限界費用 を表す. 公共投資を 1 単位増やすと将来の生産量が  $f_g$  だけ増える. つまり, 限界便益は公共資本の限界生産力に一致する. 限界費用は 2 つある. たとえば, 公共投資が 1 単位増えたとき, 民間資本が 1 単位減ったとしよう ( $dk/dg = -1$ ). このとき, 将来の生産量は  $f_k$  だけ減る. (9) 式の右辺第 1 項は, 生産サイドで測った費用を表している. 次に, 公共投資が 1 単位増えたとき, 第 1 期消費  $c_1$  が 1 単位減ったとしよう ( $dc_1/dg = -1$ ). 無差別曲線の性質を利用すると, この厚生損失は, 第 2 期消費が  $MRS = U_1/U_2$  単位だけ減った効果を持つ. (9) 式の右辺第 2 項は, 消費サイドで測った費用を表している. 一般的には, 公共投資が 1 単位増えると, 消費  $c_1$  も投資  $k$  も減る. (9) 式の右辺は, 投資減少の大きさ ( $-dk/dg$ ) と消費減少の大きさ ( $-dc_1/dg$ ) を用いて,  $f_k$  と  $MRS$  の加重平均を用いて限界費用が算出できることを意味している.