消費者行動の理論

指導教員

1　基本モデル　効用最大化

消費者の最適化問題は次のように定式化される．

$$\max_{x_1,x_2} u = U(x_1,x_2) \quad \text{subject to} \quad I = p_1x_1 + p_2x_2 \tag{1}$$

ここで，x_1, x_2 は財 1，財 2 の消費量，p_1, p_2 は財 1，財 2 の価格（所与），I は所得（所与）である．

最適化の 1 階の条件は，

$$\frac{U_1(x_1,x_2)}{U_2(x_1,x_2)} = \frac{p_1}{p_2} \tag{2}$$

である[1]．

(1), (2) 式を解くことにより，需要関数 $x_1^*(p_1,p_2,I)$, $x_2^*(p,p,I)$ が得られる[2]．

ラグランジュ乗数法

ラグランジュ関数を，

$$L(x_1,x_2,\lambda) = U(x_1,x_2) + \lambda(I - p_1x_1 - p_2x_2) \tag{3}$$

とおく（λ はラグランジュ乗数）．

1 階の条件は，

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = U_1(x_1,x_2) - \lambda p_1 = 0 \tag{4.1}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = U_2(x_1,x_2) - \lambda p_2 = 0 \tag{4.2}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \tag{4.3}$$

である．

[1] $U_i = \partial U/\partial x_i$ は各財の限界効用を表す．左辺の限界効用の比を限界代替率という．限界代替率は，財 2 で測った財 1 の私的な価値を意味する．右辺の価格比は財 2 で測った財 1 の市場価値を意味する．(2) 式は，私的な価値と市場価値が一致する水準で消費量が決まることを表している．

[2] 上付きの*は主体的均衡であることを表す．

(4.3) 式は (1) 式と同じ．また，(4.1), (4.2) 式から (2) 式が得られる．一般的に，制約条件つき最大化問題はラグランジュ乗数法を用いて解くことができる．

例題

消費者の最適化問題

$$\max_{x_1,x_2} u = x_1^2 x_2 \quad \text{subject to} \quad 180 = 2x_1 + 3x_2$$

をラグランジュ乗数法を用いて解け.

解答

ラグランジュ関数を，

$$L = x_1^2 x_2 + \lambda(180 - 2x_1 - 3x_2)$$

とおく（λ はラグランジュ乗数）．

1 階の条件は，

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 x_2 - 2\lambda = 0 \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1^2 - 3\lambda = 0 \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 180 - 2x_1 - 3x_2 = 0 \tag{5.3}$$

(5.1), (5.2) 式で λ を消去する．

$$\frac{2x_2}{x_1} = \frac{2}{3}$$

これと (5.3) 式から，$(x_1^*, x_2^*) = (60, 20)$.

問題 *1*

以下の消費者の最適化問題を解け.

(1) $\max_{x_1,x_2} u = x_1 x_2 \quad \text{subject to} \quad 120 = 2x_1 + 3x_2$

(2) $\max_{x_1,x_2} u = x_1 x_2 \quad \text{subject to} \quad I = p_1 x_1 + p_2 x_2$

(3) $\max_{x_1,x_2} u = x_1^2 x_2 \quad \text{subject to} \quad I = p_1 x_1 + p_2 x_2$

(4) $\max_{x_1,x_2} u = x_1^{1-a} x_2^a \quad \text{subject to} \quad I = p_1 x_1 + p_2 x_2$ $\quad$ ($0 < a < 1$ は定数)

2　応用　労働供給

個人の最適化問題を次のように定式化する．

$$\max_{x,l} u = U(x,l) \quad \text{subject to} \quad w(1-l) = px \tag{6}$$

ここで，x は財の消費量，l は余暇時間，p は財の価格（所与），w は賃金率（所与），である．(6) 式中の 1 は，利用可能な時間を基準化したものである[3]．$(1-l)$ は労働時間を表し，$w(1-l)$ は労働所得を表す．

(6) 式は，

$$w = px + wl \tag{7}$$

と変形できる．余暇の価格は賃金率である[4]．

ラグランジュ関数を，

$$L = U(x,l) + \lambda(w - px - wl)$$

とおく（λ はラグランジュ乗数）．

1 階の条件は，

$$\frac{\partial L}{\partial x} = U_x(x,l) - \lambda p = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial l} = U_l(x,l) - \lambda w = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = w - px - wl = 0$$

である．これを解いて，財と余暇の需要関数 $x^*(p,w)$, $l^*(p,w)$ が得られる．さらに，労働供給関数

$$L^s = 1 - l^*(p,w) \tag{8}$$

が得られる．

例題

効用関数を，

$$U(x,l) = \log x + a \log l$$

とする（$a > 0$ は定数）．

財と余暇の需要関数および労働供給関数を求めよ．

[3] たとえば，1 日だけの経済を念頭におく場合は，24 時間を 1 とおく．1 年間であれば 8,760 時間を 1 とおく．

[4] 余暇を 1 単位増やすと，労働所得が w だけ失われる．つまり，機会費用でみたときの余暇の価格は賃金率である．

解答

ラグランジュ関数を，

$$L = \log x + a \log l + \lambda(w - px - wl)$$

とおく（λ はラグランジュ乗数）．

1 階の条件は，

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{x} - \lambda p = 0 \tag{9.1}$$
$$\frac{\partial L}{\partial l} = \frac{a}{l} - \lambda w = 0 \tag{9.2}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = w - px - wl = 0 \tag{9.3}$$

(9.1), (9.2) 式より，

$$px = \frac{1}{\lambda}$$
$$wl = \frac{a}{\lambda}$$

これらを (9.3) 式に代入すると，ラグランジュ乗数は，

$$\lambda = \frac{1+a}{w}$$

である．財と余暇の需要関数，労働供給関数は，

$$x^* = \frac{w}{(1+a)p}$$
$$l^* = \frac{a}{1+a}$$
$$L^s = 1 - l^* = \frac{1}{1+a}$$

である[5]．

問題 *2*

以下の個人の最適化問題を解け（$0 < a < 1$ は定数）．

(1) $\max_{x,l} u = x^{1-a} l^a \quad \text{subject to } w(1-l) = px$

(2) $\max_{x,l} u = a \log x + l \quad \text{subject to } w(1-l) = px$

(3) $\max_{x,l} u = \log x + a \log l \quad \text{subject to } w(1-l) + T = px \quad (T \geqq 0$ は定数[6]$)$

問題 *3*

問題 2(3) で，不労所得 T が増えたときの労働供給への影響を調べよ．また，なぜそうなるのか説明せよ．

[5] 1 日 8 時間の労働を個人が主体的に選択しているとすると，$a = 2$ である．

[6] T は不労所得（労働所得以外の所得）を意味する．

3　応用　貯蓄

労働期と引退期の 2 期間生きる個人を想定する[7].

効用関数を,

$$u = U(c_1) + \rho U(c_2) \tag{10}$$

とする．c_1 は労働期の消費，c_2 は引退期の消費を表す．$0 < \rho < 1$ は割引因子である[8].

個人は労働期に 1 単位の労働を供給し，労働所得を得た後，消費と貯蓄に所得を配分する．引退期，個人は資本所得（貯蓄の元利合計）を受け取り，すべて消費して一生を終える．各期の予算制約式はそれぞれ,

$$w = c_1 + s \tag{11.1}$$
$$(1+r)s = c_2 \tag{11.2}$$

と表せる．ここで，s は貯蓄，w は賃金率（所与），r は利子率（所与）を表す.

(11.1), (11.2) 式で s を消去すると，生涯の予算制約式が得られる.

$$w = c_1 + \frac{c_2}{1+r} \tag{12}$$

したがって，個人の最適化問題を次のように定式化できる.

$$\max_{c_1, c_2} u = U(c_1) + \rho U(c_2) \quad \text{subject to} \quad w = c_1 + \frac{c_2}{1+r}$$

ラグランジュ関数を,

$$L = U(c_1) + \rho U(c_2) + \lambda \left(w - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \right)$$

とおく（λ はラグランジュ乗数）.

1 階の条件は,

$$\frac{\partial L}{\partial c_1} = U'(c_1) - \lambda = 0 \tag{13.1}$$
$$\frac{\partial L}{\partial c_2} = \rho U'(c_2) - \frac{\lambda}{1+r} = 0 \tag{13.2}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = w - c_1 - \frac{c_2}{1+r} = 0 \tag{13.3}$$

である．3 つの変数 c_1, c_2, λ について 3 つの式があるので解ける．さらに，(11.1) 式あるいは (11.2) 式を用いて，貯蓄関数 $s^* = s(w, r)$ も求められる.

---

[7] ライフサイクルモデルという.

[8] 時間選好率を $\delta > 0$ とすると，割引因子は,

$$\rho = \frac{1}{1+\delta}$$

と表せる．時間選好率が大きい個人とは，将来の消費効用を大きく割り引く，言い換えると，現在の消費効用を重視する個人である.

例題

効用関数が $U(c)=\log c$ のとき，上の 2 期モデルにおける消費関数，貯蓄関数を求めよ．

解答

(13.1), (13.2) 式から，

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{c_1}=\lambda & \Rightarrow & c_1=\frac{1}{\lambda} \\ \frac{\rho}{c_2}=\frac{\lambda}{1+r} & \Rightarrow & \frac{c_2}{1+r}=\frac{\rho}{\lambda} \end{array}$$

これらを (13.3) 式に代入する．

$$w=\frac{1}{\lambda}+\frac{\rho}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda^*=\frac{1+\rho}{w}$$

したがって，消費関数，貯蓄関数は，

$$\begin{aligned} c_1^* &= \frac{w}{1+\rho} \\ c_2^* &= \frac{\rho}{1+\rho}w(1+r) \\ s^* &= \frac{\rho}{1+\rho}w \end{aligned}$$

である[9]．

問題 *4*

労働所得税（税率 t）があるとき，各期の予算制約式は，

$$(1-t)w=c_1+s \tag{14.1}$$

$$(1+r)s=c_2 \tag{14.2}$$

となる．効用関数が $U(c)=\log c$ のとき，消費関数，貯蓄関数を求めよ．

問題 *5*

消費税（税率 θ）があるとき，各期の予算制約式は，

$$w=(1+\theta)c_1+s \tag{15.1}$$

$$(1+r)s=(1+\theta)c_2 \tag{15.2}$$

となる．効用関数が $U(c)=\log c$ のとき，消費関数，貯蓄関数を求めよ．

問題 *6*

労働所得税があるときの消費水準と消費税があるときの消費水準が同じであるとする．

(1) 2 つの税率 t,θ の関係式を求めよ．

(2) 消費税のときの貯蓄の方が労働所得税のときの貯蓄よりも大きいことを示せ．また，なぜそうなるのか説明せよ．

---

[9] 労働期の限界消費性向は $1/(1+\rho)$ で一定，限界貯蓄性向も $\rho/(1+\rho)$ で一定である．

4　応用　出生率

1. 利他的動機

家計の最適化問題を次のように定式化する．

$$\max_{c,\,n}\ u = \log c + a \log n \quad \text{subject to} \quad w(1 - zn) = c + pn \tag{16}$$

c は消費，n は子どもの数を表す．$a > 0$ は子どもの数への選好の強さを表す定数である．w は賃金率，p は子ども 1 人あたりの養育費，$0 < z < 1$ は子ども 1 人あたりの養育時間を表す．$(1 - zn)$ は労働時間であり，左辺は労働所得を意味する．右辺は消費支出と養育支出からなる総支出を意味する．

(16) 式を変形すると，

$$w = c + (p + wz)n$$

となる．子どもの価格は，養育費 p に養育の機会費用 wz を加えたものである．

ラグランジュ関数を，

$$L = \log c + a \log n + \lambda[w - c - (p + wz)n]$$

とおく（λ はラグランジュ乗数）．

1 階の条件は，

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial c} &= \frac{1}{c} - \lambda = 0\\ \frac{\partial L}{\partial n} &= \frac{a}{n} - \lambda(p + wz) = 0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= w - c - (p + wz)n = 0\end{aligned}$$

である．これを解いて，消費需要と最適こども数が得られる．

$$\begin{aligned}c^* &= \frac{w}{1 + a}\\ n^* &= \frac{a}{1 + a}\frac{w}{p + wz}\end{aligned} \tag{17}$$

［比較静学分析］

(17) 式より，

$$\begin{aligned}&\frac{\partial n^*}{\partial w} > 0 \quad (\text{if } p > 0)\\ &\frac{\partial n^*}{\partial p} < 0\\ &\frac{\partial n^*}{\partial z} < 0\\ &\frac{\partial n^*}{\partial a} > 0\end{aligned}$$

が得られる．出生率が高いのは，(1) 賃金率が高く，(2) 養育費が安く，(3) 養育時間が短く，(4) 子どもの数への選好が強いとき，である．

2. 保険動機

家計の最適化問題を次のように定式化する．

$$\max_{c_1,\, c_2,\, n} u = \log c_1 + \rho \log c_2$$

subject to

$$w(1 - zn) = c_1 + pn \tag{18.1}$$
$$nT = c_2 \tag{18.2}$$

(18.1) 式は第 1 期（若年期）の予算制約を表し，(18.2) 式は第 2 期（引退期）の予算制約を表す．若年期の個人は，働いて，子育てをし，消費する．引退期の個人は，子ども 1 人あたり T だけの所得移転を受け取る．子を持つ動機として，将来働けなくなったときの所得を保証するためであると仮定している．

ラグランジュ関数を，

$$L = \log c_1 + \rho \log(nT) + \lambda[w - c_1 - (p + wz)n]$$

とおく（λ はラグランジュ乗数）．

1 階の条件は，

$$\frac{\partial L}{\partial c_1} = \frac{1}{c_1} - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial n} = \frac{\rho}{n} - \lambda(p + wz) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = w - c_1 - (p + wz)n = 0$$

である[10]．これを解くと，

$$c_1^* = \frac{w}{1 + \rho}$$
$$n^* = \frac{\rho}{1 + \rho} \frac{w}{p + wz} \tag{19}$$

が得られる．

(17) 式と (19) 式を比較すると，子を持つ動機は違っても，最適子ども数には似たような性質があることが分かる．

問題 *7*

(19) 式を導出せよ．

問題 *8*

都道府県データを用いて，散布図 (n, x) を作成せよ（n は合計特殊出生率，x は出生率に影響を与えそうな何らかの変数）．

[10] 対数の公式

$$\log(nT) = \log n + \log T$$

を用いた．

5 応用　教育

1. 自分で選択

教育期と労働期からなる 2 期モデルを考える．

教育期の時間制約を，

$$1 = l + e \tag{20}$$

とする．l は余暇時間，e は教育時間を表し，左辺の 1 は利用可能な総時間を表す．

労働期の予算制約式を，

$$w(e) = c \tag{21}$$

とする．c は消費，$w(e)$ は労働所得を表す．以下，$w'(e) > 0$, $w''(e) \leqq 0$ と仮定する[11]．

個人の効用関数を，

$$u = U(c, l) = c + a \log l \tag{22}$$

とする．$a > 0$ は余暇に対する選好の強さを表す定数である．

(20), (21) 式を (22) 式に代入すると，個人の最適化問題は次のように定式化できる．

$$\max_{e} \; u = w(e) + a \log(1 - e)$$

1 階の条件は，

$$w'(e) = \frac{a}{1 - e} \tag{23}$$

である．

教育時間を増やすと労働生産性が上昇し将来消費が増える．左辺は消費の増加にともなう限界効用を表す．他方，労働時間を 1 単位増やすと余暇が 1 単位減る．右辺は余暇の減少にともなう限界不効用を表す．(23) 式は，教育の限界効用と限界不効用が一致する水準で最適教育時間が決まることを意味している．

横軸を e とすると，左辺の $w'(e)$ は右下がりの曲線，あるいは水平線．右辺の $a/(1-e)$ は，$0 \leqq e < 1$ の範囲で右上がり．交点は存在すれば 1 つ．図から，均衡 e^* において効用が最大となることが分かる．

問題 *9*

なぜ均衡 e^* において効用が最大となるのか，説明せよ．

問題 *10*

教育時間と労働所得の関係を，

$$w(e) = w_0 + be$$

と特定化する（$w_0 > 0, b > 0$ は定数）．このときの最適教育時間を求めよ．

[11] 労働生産性に対する教育効果は正かつ逓減的であるという意味．

2. 親が選択

親の効用関数を，

$$u = U(c, h) = c + a \log h \tag{24}$$

とする．c は消費，h は子どもの人的資本を表す[12]．$a > 0$ は子どもへの選好の強さを表す定数である．

予算制約式を，

$$w = c + e \tag{25}$$

とする．w は労働所得，e は教育支出を表す．

教育支出が多いほど子どもの人的資本は増えると仮定する．教育支出と人的資本の関係を，

$$h = h(e) = h_0 e^b \tag{26}$$

と特定化する（$h_0 > 0, b > 0$ は定数）．

(24), (25) 式を (26) 式に代入すると，親の最適化問題は次のように定式化できる．

$$\max_e u = w - e + a \log h_0 + ab \log e$$

1 階の条件は，

$$-1 + \frac{ab}{e} = 0$$

である．

教育支出を増やすと消費が減る．左辺の第 1 項は消費の減少にともなう限界不効用を表す．他方，教育支出を増やすと子どもの人的資本が増える．第 2 項は人的資本の増加にともなう限界効用を表す．上式は，限界効用と限界不効用が一致する水準で，子どもに対する教育が決まることを意味している．

最適教育支出は，

$$e^* = ab \tag{27}$$

である．教育支出が大きいのは，(1) 人的資本形成に対する教育効果が大きいとき[13]，(2) 子どもの人的資本への選好が強いとき，である．

問題 *11*

都道府県データを用いて，散布図 (e, x) を作成せよ（e は 1 人あたり教育支出，x は教育に影響を与えそうな何らかの変数）．

[12] 人的資本とは何か，各自で調べてください．ここでは，労働生産性や稼得能力と同じ意味で使います．

[13] (26) 式から，

$$\frac{e}{h}\frac{\partial h}{\partial e} = b$$

が成り立つ．b は人的資本形成における教育の弾力性を表す．