家族の経済学ー親子間の教育ゲーム

指導教員

1　モデル

教育に関する親子間のゲームを紹介する[1].

1.1　親

親の効用関数

$$u^P = u(c, h^C) = \log c + \log h^C \tag{1}$$

c 親の消費
h^C 子の将来の人的資本

家計予算制約式

$$(1-\tau)wh^P = c \tag{2}$$

w 賃金率 (一定)
h^P 親の人的資本（有効労働時間）
$0 \leqq \tau < 1$ 税率

政府予算制約式

$$\tau wh^P = g \tag{3}$$

g 1 人あたり学校教育費

人的資本蓄積

$$h^C = \alpha h^P + \beta eg \tag{4}$$

e 子の努力 $(0 \leq e_t \leq 1)$
$0 < \alpha < 1$ 人的資本形成における遺伝的要素の大きさ
$0 < \beta < 1$ 人的資本形成における学校教育の効果の大きさ

(4) 式では，学校教育 g と子の努力 e が掛け算になっている．施設が充実すると，子の努力の限界生産性が上昇する $(\partial h^C/\partial e = \beta g)$．子の努力が増えると，施設の限界生産性が上昇する $(\partial h^C/\partial g = \beta e)$．互いの限界生産性を引き上げるという意味で，学校教育と子の努力は補完的である．

[1] Palivos and Varvarigos (2013) Intergenerational complementarities in education, endogenous public policy, and the relation between growth and volatility, Journal of Public Economic Theory 15, 249-272.

1.2　子

子の効用関数

$$u^C = u(e,d) = \log(1-e) + \log d \tag{5}$$

　d 子の将来の消費

将来の家計予算制約式

$$d = wh^C \tag{6}$$

2　最適化問題

2.1　親

親は，**子の努力e を所与として**，効用が最大となるように税率 τ を決める．(3) 式を (4) 式に代入する．

$$\begin{aligned} h^C &= (\alpha + \beta we\tau)h^P \\ &= \beta w\left(\gamma + e\tau\right)h^P \end{aligned} \tag{7}$$

ただし，

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta w} \tag{8}$$

(2), (7) 式を (1) 式に代入する．

$$u^P = \log(1-\tau) + \log\left(\gamma + e\tau\right) + \log\beta + 2\log w + 2\log h^P$$

効用が最大となるのは，

$$\frac{\partial u^P}{\partial \tau} = \frac{-1}{1-\tau} + \frac{e}{\gamma + e\tau} = 0 \tag{9}$$

のとき．ただし，$\tau \geqq 0$ でなければならない．

　(9) 式より，親の反応関数が得られる．

$$\tau^*(e) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{e}\right) & \text{if} \quad e \geqq \gamma \\ 0 & \phantom{\text{if}} \quad e \leqq \gamma \end{cases} \tag{10}$$

2.2　子

子は，**親の税率τ を所与として**，効用が最大となるように努力 e を決める．
(6), (7) 式を (5) 式に代入する．

$$u^C = \log(1-e) + \log(\gamma + e\tau) + \log\beta + 2\log w + \log h^P$$

効用が最大となるのは，

$$\frac{\partial u^C}{\partial e} = \frac{-1}{1-e} + \frac{\tau}{\gamma + e\tau} = 0 \tag{11}$$

のとき．ただし，$e \geqq 0$ でなければならない．
(11) 式より，子の反応関数が得られる．

$$e^*(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{\tau}\right) & \text{if} \quad \tau \geqq \gamma \\ 0 & \quad\quad \tau \leqq \gamma \end{cases} \tag{12}$$

3　ナッシュ均衡

ナッシュ均衡は，(10), (12) 式で表される 2 本の反応曲線の交点である．
明らかに，$(e, \tau) = (0, 0)$ はナッシュ均衡．$(0, 0)$ 以外の均衡が存在するための条件は，

$$0 < \gamma \le \frac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha \le \frac{1}{8}\beta w \tag{13}$$

である．

［証明］対称性より，均衡では $e = \tau$ が成り立つ．(12) 式で $\tau = e$ としたときの方程式

$$e = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{e}\right)$$

が実数解を持てばよい．変形すると，e の 2 次方程式

$$2e^2 - e + \gamma = 0 \tag{14}$$

が得られる．実数解を持つのは，判別式 $D = 1 - 8\gamma \ge 0$ のときである．[Q.E.D.]

3.1　複数均衡

(13) 式が満たされると仮定する．ナッシュ均衡は次の 3 つである（図 1 参照）．

$$(e, \tau) = \left(e^H, \tau^H\right), \left(e^L, \tau^L\right), (0, 0) \tag{15}$$

ただし，$\tau^H = e^H, \tau^L = e^L$ であって，e^H, e^L は，(14) 式の解である．

$$e^H = \tau^H = \frac{1 + \sqrt{1 - 8\gamma}}{4}$$
$$e^L = \tau^H = \frac{1 - \sqrt{1 - 8\gamma}}{4}$$

均衡 $\left(e^H, \tau^H\right), (0, 0)$ は安定．均衡 $\left(e^L, \tau^L\right)$ は不安定（説明せよ）．
均衡 $\left(e^H, \tau^H\right)$ の方が効率的．この均衡では，親は，子が努力すると予想して，学校教育を充実させる．子は，学校教育が充実すると予想して，努力する．親子の協調関係が実現する．ただし，何らかの要因で，$\left(e^H, \tau^H\right)$ から $(0, 0)$ へと均衡が移る可能性がある (coordination failure という)．均衡は移り気 (volatility) である．

3.2　「罠」均衡

(13) 式が満たされないと仮定する．つまり，

$$\alpha > \frac{1}{8}\beta w \tag{16}$$

このときのナッシュ均衡は $(e, \tau) = (0, 0)$ だけである．
α は人的資本形成における遺伝などの先天的要因の大きさを，βw は学校教育という後天的な要因の大きさを表している．先天的要因が支配的であるとき，親はどうせ子は努力しないだろうと予想し，学校教育に無関心である．子はどうせ施設が不十分だろうと予想し，努力しない．親子間の協調関係は実現しない．

問題

(1) 1 人あたり学校教育費 g と子の努力 e のデータを探して，散布図を作成せよ．
(2) 日本の教育制度は，親子の協調関係を反映しているか．散布図をもとに議論せよ．

図1