家族の経済学ー出生と教育の経済モデル

指導教員

1　基本モデル

効用関数

$$u(c,n) = \log c + \beta \log n \tag{1}$$

c 消費
n 子どもの数 (出生率)
$\beta > 0$ 子どもの数への選好の強さを表すパラメータ (定数)

予算制約式

$$wl = c + p_n n \tag{2}$$

w 賃金率 (定数)
l 労働時間
p_n 養育財の価格 (定数)

時間制約式

$$1 = l + \phi n \tag{3}$$

$0 < \phi < 1$ 1 人あたり養育時間 (定数)

(2), (3) 式で労働時間 l を消去すると，

$$w = c + (w\phi + p_n)n \tag{4}$$

(4) 式は，子どもの価格が，(i) 養育費 p_n と，(ii) 養育の機会費用 (養育のために失われた賃金所得)$w\phi$ の合計であることを意味している．

家計の最適化問題

$$\max_{c,\,n}\ u = \log c + \beta \log n \quad \text{subject to } w = c + (w\phi + p_n)n$$

ラグランジュ関数を，

$$L = \log c + \beta \log n + \lambda\left[w - c - (w\phi + p_n)n\right]$$

とおく（λ はラグランジュ乗数）．

1 階の条件は，

$$\frac{\partial L}{\partial c} = \frac{1}{c} - \lambda = 0 \tag{5}$$
$$\frac{\partial L}{\partial n} = \frac{\beta}{n} - \lambda(w\phi + p_n) = 0 \tag{6}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = w - c - (w\phi + p_n)n = 0 \tag{7}$$

(5)-(7) 式より，最適消費，最適出生率が得られる．

$$c^* = \frac{w}{1+\beta} \tag{8}$$
$$n^* = \frac{\beta}{1+\beta}\frac{w}{w\phi + p_n} \tag{9}$$

問題 *1*　(8), (9) 式を導出せよ．

比較静学

(9) 式より，

$$\frac{\partial n^*}{\partial w} > 0 \tag{10.1}$$
$$\frac{\partial n^*}{\partial \phi} < 0 \tag{10.2}$$
$$\frac{\partial n^*}{\partial p_n} < 0 \tag{10.3}$$
$$\frac{\partial n^*}{\partial \beta} > 0 \tag{10.4}$$

が得られる．出生率が上昇するのは，(i) 賃金率 w が高いとき，(ii) 1 人あたり養育時間 ϕ が少ないとき，(iii) 養育財価格 p_n が低いとき，(iv) 子どもの数への選好 β が強いとき，である．

問題 *2*　(10.1)-(10.4) 式を確認せよ．

2　子どもの数と質

効用関数

$$u(c, n, h) = \log c + \beta \log(nh) \tag{11}$$

h 子どもの人的資本

$\beta > 0$ 子どもの人的資本の総和に対する選好の強さを表すパラメータ (定数)

予算制約式

$$wl = c + p_n n + p_e ne \tag{12}$$

e 1 人あたり教育財支出

p_e 教育財の価格 (定数)

時間制約式

$$1 = l + \phi n \tag{13}$$

人的資本形成

$$h = Ae^{\alpha} \tag{14}$$

$A > 0$ (定数)，$0 < \alpha < 1$ (定数)

(12), (13) 式で l を消去すると，

$$w = c + (w\phi + p_n)n + p_e ne \tag{15}$$

が得られる，

(14) 式を (11) 式に代入すると，

$$u(c, n, h) = \log c + \beta \log n + \alpha\beta \log e \tag{16}$$

が得られる．

問題 *3*　(15), (16) 式を導出せよ．

家計の最適化問題

ラグランジュ関数を，

$$L = \log c + \beta \log n + \alpha\beta \log e + \lambda \left[w - c - (w\phi + p_n)n - p_e ne\right]$$

とおくと，1 階の条件は，

$$\frac{\partial L}{\partial c} = \frac{1}{c} - \lambda = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial L}{\partial n} = \frac{\beta}{n} - \lambda(w\phi + p_n + p_e e) = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial e} = \frac{\alpha\beta}{e} - \lambda p_e n = 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = w - c - (w\phi + p_n)n - p_e ne = 0 \tag{20}$$

まず，(17), (18), (20) 式から，

$$c^* = \frac{1}{\lambda} = \frac{w}{1 + \beta} \tag{21}$$

が得られる．

問題 *4*　(21) 式を導出せよ．

次に，(18), (19), (21) 式から，

$$n^* = \frac{\beta(1 - \alpha)}{1 + \beta} \frac{w}{w\phi + p_n} \tag{22}$$

$$e^* = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{w\phi + p_n}{p_e} \tag{23}$$

が得られる．

問題 *5*　(22), (23) 式を導出せよ．

2.1　比較静学

2.1.1　出生率

(22) 式より，

$$\frac{\partial n^*}{\partial w} > 0 \tag{24.1}$$
$$\frac{\partial n^*}{\partial \phi} < 0 \tag{24.2}$$
$$\frac{\partial n^*}{\partial p_n} < 0 \tag{24.3}$$
$$\frac{\partial n^*}{\partial \beta} > 0 \tag{24.4}$$
$$\frac{\partial n^*}{\partial \alpha} < 0 \tag{24.5}$$
$$\frac{\partial n^*}{\partial p_e} = 0 \tag{24.6}$$

が成立する．出生率が上昇するのは，(i) 賃金率 w が高いとき，(ii) 1 人あたり養育時間 ϕ が少ないとき，(iii) 養育財価格 p_n が低いとき，(iv) 子どもの数への選好 β が強いとき，そして，(v) 人的資本形成における教育効果 α が小さいとき，である．教育財価格 p_e は出生率に影響しない．

問題 *6*　(24.1)-(24.6) 式を確認せよ．

2.1.2　教育

(23) 式より，

$$\frac{\partial e^*}{\partial w} > 0 \tag{25.1}$$
$$\frac{\partial e^*}{\partial \phi} > 0 \tag{25.2}$$
$$\frac{\partial e^*}{\partial p_n} > 0 \tag{25.3}$$
$$\frac{\partial e^*}{\partial p_e} < 0 \tag{25.4}$$
$$\frac{\partial e^*}{\partial \alpha} > 0 \tag{25.5}$$
$$\frac{\partial e^*}{\partial \beta} = 0 \tag{25.6}$$

が成立する．子ども 1 人あたりの教育支出が増加するのは，(i) 賃金率 w が高いとき，(ii) 1 人あたり養育時間 ϕ が多いとき，(iii) 養育財価格 p_n が高いとき，(iv) 教育財価格 p_e が低いとき，(v) 人的資本形成における教育効果 α が大きいとき，である．なお，子どもの数への選好 β は教育費に影響しない．

問題 *7*　(25.1)-(25.6) 式を確認せよ．

2.1.3　子どもの量と質のトレードオフ

(22), (23) 式より，

$$n^*e^* = \frac{\beta\alpha}{1+\beta}\frac{w}{p_e} \tag{26}$$

が得られる．

(26) 式は，α, β, そして，実質教育費 p_e/w が一定であるとき，1 人あたり教育費 e^* が上昇するような環境変化のもとで，出生率 n^* が低下することを意味している．つまり，出生率低下の要因の 1 つとして，1 人あたり教育費の上昇を挙げることができる．

問題 *8*　出生率と 1 人あたり教育費に関する散布図を作成し，右下がりの関係があるかどうかを調べよ．