時間整合性と自信過剰[*]

指導教員

1 基礎知識

1.1 時間選好率

効用関数

$$u = U(c_1, c_2)$$

c_1 現在消費
c_2 将来消費

無差別曲線

$$\bar{u} = U(c_1, c_2)$$

限界代替率

$$MRS = \frac{U_1(c_1, c_2)}{U_2(c_1, c_2)}$$

定義（時間選好率）

45 度線上の点 (c, c) における限界代替率マイナス 1 を，消費水準 c における時間選好率という．$\rho(c)$ とかく．

$$\rho(c) = \frac{U_1(c, c)}{U_2(c, c)} - 1 \tag{1}$$

(1) 式の意味

reference point として，現在消費と将来消費が同じである状況を考える．限界代替率とは，現在消費を 1 単位増やせるなら手放しても良いと考える将来消費の量を表す．つまり，将来消費で測った現在消費の価値を表す．たとえば，限界代替率が 1 であるとすると，現在消費と将来消費は（限界的に）等価であると考えていることを意味する．

しかし，人は一般的に，現在消費を 1 単位増やせるなら，将来消費を 1 単位よりも多く手放しても良いと考えるだろう．時間選好率とは，この「1 単位よりも多い部分」を意味している．時間選好率が大きい個人とは，現在消費を重視する個人のことを意味している．

---

[*] Wilkinson and Klaes (2012) の 7 章に基づいている．

問題 *1*　次の効用関数の時間選好率 $\rho(c)$ を求めよ．

(1) $U(c_1, c_2) = c_1^3 c_2^2$

(2) $U(c_1, c_2) = c_1^{1+a} c_2$ ($a > 0$ は定数)

(3) $U(c_1, c_2) = a \ln c_1 + c_2$ ($a > 0$ は定数)

問題 *2*　個人の選好が上の問題 1(3) の効用関数で表されるとき，低所得の個人ほど時間選好率が大きいことを示せ．

1.2　Discounted Utility Model (DUM)

効用関数

$$U(c_1, c_2) = u(c_1) + \frac{1}{1+\rho} u(c_2) \tag{2}$$

$\rho > 0$ は定数．

基本定理

(2) 式の効用関数における時間選好率は ρ で一定である．

問題 *3*　基本定理を証明せよ．

定義（割引因子）

(2) 式で，

$$\delta = \frac{1}{1+\rho} \tag{3}$$

とおく．$0 < \delta < 1$ である．δ を discount factor (割引因子あるいは割引要素) という．

1.3　時間整合性

3 期モデル

効用関数

$$U_0 = u(c_0) + \delta U_1 \tag{4}$$

$$U_1 = u(c_1) + \delta U_2 \tag{5}$$

$$U_2 = u(c_2) \tag{6}$$

c_0, c_1, c_2 消費

U_0, U_1, U_2 各時点における（期待）効用

$0 < \delta < 1$ 割引因子

予算制約式

$$y = c_0 + s_0 \tag{7}$$
$$(1+r)s_0 = c_1 + s_1 \tag{8}$$
$$(1+r)s_1 = c_2 \tag{9}$$

y 0 期の所得（所与）
s_0 0 期の貯蓄
s_1 1 期の貯蓄
r 利子率（所与）

例題　異時点間の消費の最適配分を与える式を求めよ．

解法 *1*

(4), (5), (6) 式より，生涯効用は,

$$U_0 = u(c_0) + \delta u(c_1) + \delta^2 u(c_2) \tag{10}$$

(7), (8), (9) 式より，生涯の予算制約式は,

$$y = c_0 + \frac{c_1}{1+r} + \frac{c_2}{(1+r)^2} \tag{11}$$

ラグランジュ関数を,

$$L = u(c_0) + \delta u(c_1) + \delta^2 u(c_2) + \lambda \left[y - c_0 - \frac{c_1}{1+r} - \frac{c_2}{(1+r)^2} \right]$$

とおく（$\lambda > 0$ はラグランジュ乗数）．
最適化の条件は,

$$\frac{\partial L}{\partial c_0} = u'(c_0) - \lambda = 0 \tag{12.1}$$
$$\frac{\partial L}{\partial c_1} = \delta u'(c_1) - \frac{\lambda}{1+r} = 0 \tag{12.2}$$
$$\frac{\partial L}{\partial c_2} = \delta^2 u'(c_2) - \frac{\lambda}{(1+r)^2} = 0 \tag{12.3}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = y - c_0 - \frac{c_1}{1+r} - \frac{c_2}{(1+r)^2} = 0 \tag{12.4}$$

4 つの変数 c_0, c_1, c_2, λ に関して 4 本の方程式があるので解ける．貯蓄 s_0, s_1 も求められる．

問題 *4*

効用関数を，$u(c) = \log c$ と特定化する．上の解法 1 を用いて，最適消費配分 (c_0^*, c_1^*, c_2^*)，および最適貯蓄 s_0^*, s_1^* を求めよ．

解法 *2*（**後ろ向き帰納法**，*backward induction*）

(i) 2 期の問題

貯蓄の元利合計をすべて消費する．

$$c_2^* = (1+r)s_1 \tag{13}$$

(ii) 1 期の問題

s_0 を所与として，次の問題を解く．

$$\max_{c_1,\,s_1} U_1 = u(c_1) + \delta u(c_2^*)$$

subject to (13) and

$$(1+r)s_0 = c_1 + s_1 \tag{14}$$

制約条件を代入すると，

$$\max_{s_1} U_1 = u((1+r)s_0 - s_1) + \delta u((1+r)s_1)$$

1 階の条件は，

$$-u'((1+r)s_0 - s_1) + (1+r)\delta u'((1+r)s_1) = 0 \tag{15}$$

(15) 式より，$s_1^* = s_1(s_0)$ が得られる．さらに，(14), (13) 式より，$c_1^* = c_1(s_0), c_2^* = c_2(s_0)$ が得られる．1 期の効用は，

$$U_1^* = u(c_1^*) + \delta u(c_2^*) \tag{16}$$

で与えられる．

(iii) 0 期の問題

$$\max_{c_0,\,s_0} U_0 = u(c_0) + \delta U_1^*$$

subject to (16) and

$$y = c_0 + s_0 \tag{17}$$

制約条件を代入すると，

$$\max_{s_0} U_0 = u(y - s_0) + \delta\left[u(c_1^*) + \delta u(c_2^*)\right]$$

1 階の条件は，

$$-u'(y - s_0) + \delta\left[u'(c_1^*)\frac{\partial c_1^*}{\partial s_0} + \delta u'(c_2^*)\frac{\partial c_2^*}{\partial s_0}\right] = 0 \tag{18}$$

である．これを解くことにより，0 期の最適貯蓄 s_0^* が求められる．以下，$c_0^*, c_1^*, c_2^*, s_1^*$ も求められる．

問題 *5*

効用関数を，$u(c) = \log c$ と特定化する．解法 2 を用いて，最適消費配分 (c_0^*, c_1^*, c_2^*)，および最適貯蓄 s_0^*, s_1^* を求めよ．

解法 1 と解法 2 を比較する．まず，(15) 式より，

$$u'(c_1^*) = (1+r)\delta u'(c_2^*) \tag{19}$$

が得られる．(19) 式を用いると，(18) 式は，

$$-u'(c_0^*) + \delta u'(c_1^*)\left[\frac{\partial c_1^*}{\partial s_0} + \frac{1}{1+r}\frac{\partial c_2^*}{\partial s_0}\right] = 0$$

と変形できる．さらに，1 期の予算制約式

$$(1+r)s_0 = c_1^* + \frac{c_2^*}{1+r}$$

の両辺を s_0 で微分すると，

$$1+r = \frac{\partial c_1^*}{\partial s_0} + \frac{1}{1+r}\frac{\partial c_2^*}{\partial s_0}$$

が得られるので，これを (18) 式に代入すると，

$$u'(c_0^*) = (1+r)\delta u'(c_1^*) \tag{20}$$

が得られる．

解法 1 の 3 つの条件 (12.1), (12.2), (12.3) 式で λ を消去すると，(19), (20) 式に一致する．生涯予算制約 (12.4) 式も共通である．したがって，解法 1 の解と解法 2 の解は一致する．

個人の選好が，(4), (5), (6) 式，あるいは (10) 式で表せるとする．この個人が，現在の消費，貯蓄のみならず，将来の消費，貯蓄のすべてを 0 期に選択し，その選択に拘束される（コミットする）としよう．仮に，1 期に選択を変更する機会が与えられたとき，彼は変更するだろうか．上述のモデルは，彼が変更しないことを説明している．彼は最初の選択に喜んでコミットし，決して「後悔」しない．このような個人は，時間整合的 (time consistent) であるという．

1.4 双曲割引

次のような選好を持つ個人は，時間非整合 (time-inconsistent) であるという．

$$U_0 = u(c_0) + \beta\delta U_1 \tag{4'}$$

$$U_1 = u(c_1) + \delta U_2 \tag{5'}$$

$$U_2 = u(c_2) \tag{6'}$$

where $0 < \beta < 1$ and $0 < \delta < 1$.

意味　時点 $t = 0$ の割引率 $\beta\delta$ が，時点 $t = 1$ の割引率 δ よりも小さい．present bias, self-control problem という．β が小さい個人ほど極度に現在志向が強い（我慢できない）ことを意味する．

1.5　時間非整合性と自信過剰

以下では，各期の効用を u_0, u_1, u_2 で表す.

1. 時間非整合性（双曲割引）

時点 $t = 0$ における期待効用

$$U_0 = u_0 + \beta\delta EU_1$$
$$EU_1 = u_1 + \delta u_2 \tag{21}$$

時点 $t = 1$ における効用

$$U_1 = u_1 + \beta\delta u_2 \tag{22}$$

where $0 < \delta < 1$ and $0 < \beta \leq 1$.

(21) 式の意味

時点 $t = 0$ において，時点 $t = 1$ における自分 (future self) は時間整合的であると考えている.

(22) 式の意味

実際に時点 $t = 1$ になったとき，実は非整合であることに気づく.

このような個人は，*fully naive* であるという.

2. 自信過剰 (overconfidence)

上の (21) 式は，present self の future self に対する予想を含んでいる．いろいろな可能性があるので，一般化する.

$$EU_1 = u_1 + \hat{\beta}\delta u_2 \tag{23}$$

where

$$\beta \leq \hat{\beta} \leq 1 \tag{24}$$

β 自分の真の非整合性

$\hat{\beta}$ future self の非整合性に対する予想

時間非整合な個人を次の 3 つのタイプに分類できる.

1. *fully naive agent* $(\beta < \hat{\beta} = 1)$
future self は時間整合的であると考えている.
2. *sophisticated agent* $(\beta = \hat{\beta} < 1)$
future self も今の自分と同じく時間非整合であると考えている.
3. *partially naive agent* $(\beta < \hat{\beta} < 1)$
future self は時間非整合性が改善されると考えている.

2 文献紹介

Della Vigna and Malmendier (2004)

How do rational firms respond to consumer biases? In this paper we analyze the profit-maximizing contract design of firms if consumers have time-inconsistent preferences and are partially naive about it. We consider markets for two types of goods: goods with immediate costs and delayed benefits (investment goods) such as health club attendance, and goods with immediate benefits and delayed costs (leisure goods) such as credit card-financed consumption. We establish three features of the profit-maximizing contract design with partially naive time-inconsistent consumers. First, firms price investment goods below marginal cost. Second, firms price leisure goods above marginal cost. Third, for all types of goods firms introduce switching costs and charge back-loaded fees. The contractual design targets consumer misperception of future consumption and underestimation of the renewal probability. The predictions of the theory match the empirical contract design in the credit card, gambling, health club, life insurance, mail order, mobile phone, and vacation time-sharing industries. We also show that time inconsistency has adverse effects on consumer welfare only if consumers are naive.

Diamond and Köszegi (2003)

Some people have self-control problems regularly. This paper adds endogenous retirement to Laibson's quasi-hyperbolic discounting savings model [Quarterly Journal of Economics 112 (1997) 443–477]. Earlier selves think that the deciding self tends to retire too early and may save less to induce later retirement. Still earlier selves may think the pre-retirement self does this too much, saving more to induce early retirement. The consumption pattern may be different from that with exponential discounting. Other observational non-equivalence includes the impact of changing mandatory retirement rules or work incentives on savings and a possibly negative marginal propensity to consume out of increased future earnings. Naive agents are briefly considered.

Findley and Caliendo (2015)

Hyperbolic discounting with naiveté is widely believed to provide a better explanation than exponential discounting of why people borrow so much and why they wait so long to save for retirement. We research a different set of conclusions. We show that if financial planning is enriched to include the choice of when to retire, then naive hyperbolic discounters may borrow far less and start saving for retirement significantly earlier than exponential discounters.

参考文献

[1] Della Vigna, S., Malmendier, U. (2004) Contract design and self-control: Theory and evidence, *Quarterly Journal of Economics* 119, 353-402.

[2] Diamond, P., Köszegi, B. (2003) Quasi-hyperbolic discounting and retirement, *Journal of Public Economics* 87, 1839-1872.

[3] Findley, T.S., Caliendo, F.N. (2015) Time inconsistency and retirement choice, *Economics Letters* 129, 4-8.

[4] Wilkinson, N., Klaes, M. (2012) *An Introduction to Behavioral Economics* 2nd Edition, Palgrave Macmillan, USA.