政策の時間整合性：対数効用と線形技術の功罪

宮澤和俊*

1 Introduction

経済学では効用関数を対数関数で近似することが多い．また，内生成長のモデルでは，生産関数を資本の1次関数で近似することがある[1]．本稿では，Xie (1997) を紹介する．対数効用と AK モデルを併用すると，政策の時間整合性が過大評価され得ることを説明する．

政府をリーダー，個人をフォロワーとする逐次手番ゲームを考える．政府は所得税を財源として公共財を供給する．個人は課税後の所得を消費と投資に配分する．現在の投資は，現在の消費を減らすというコストが生じる．他方，資本蓄積を通して将来の生産が増えるという便益が生じる．個人は投資の限界便益と限界費用が一致する水準で投資水準を決める．政府は，こうした個人の行動を読み込んだうえで，税率と公共財の水準を決める．

個人と政府の違いは，公共財供給の費用に関する見積りである．たとえば，所得税率を引き下げる政策を考えよう．政府は，税収が減ると公共財供給が減り，個人の厚生が悪化することを費用に算入する．他方，個人は減税により可処分所得が増えるという便益は見積るが，減税により公共財の供給水準が下がるというコストは考慮しない．つまり，個人は減税の純便益を政府よりも過大に評価する．政府は個人の過大評価を見越したうえで所得税率を決定する．なお，政府，個人のいずれも遠い将来まで見据えたうえで現在の意思決定をおこなうと仮定する．

次節ではモデルを説明する．3 節では効用関数と生産関数を特定化して，シュタッケルベルク均衡を導出する．4 節では社会的最適を導出し，3 節の結果と比較する．最後の節はまとめである．

2 Model

2.1 モデルの設定

時点 $t = 0$ における個人の効用関数を，

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}[U(c(t)) + V(g(t))]dt \tag{1}$$

とする．$c(t)$ は時点 t の消費，$g(t)$ は公共財を表す．$U(c(t))$ は消費から得られる効用を表し，$V(g(t))$ は公共財から得られる効用を表す．$\rho > 0$ は時間選好率である．

個人の予算制約式は，

$$[1 - \tau(t)]y(t) = c(t) + i(t) \tag{2}$$

で与えられる．$y(t)$ は所得，$i(t)$ は投資，$\tau(t)$ は所得税率を表す．

生産関数を，

$$y(t) = f(k(t)) \tag{3}$$

とする．$y(t)$ は産出，$k(t)$ は資本を表す．

---

*Faculty of Economics, Doshisha Univeristy, Kamigyo, Kyoto 602-8580 Japan. kazu@mail.doshisha.ac.jp

[1] AK モデルという．

資本蓄積方程式は，

$$\dot{k}(t) = i(t) - \delta k(t) \tag{4}$$

で与えられる．$\delta \geq 0$ は資本減耗率を表す．簡単化のため，$\delta = 0$ とする．

私的財 1 単位から公共財 1 単位が生産できると仮定する．政府の予算制約式は，

$$\tau(t)y(t) = g(t) \tag{5}$$

で与えられる．

時点 t における資源制約式は，

$$y(t) = c(t) + i(t) + g(t) \tag{6}$$

である．(6) 式は，(2), (5) 式から導出できる．

2.2 個人の問題

時点 $t = 0$ の個人は，現在および将来の税率 $\tau(t)$ と公共財 $g(t)$，そして現在の資本 $k(0)$ を所与として，(2), (3), (4) 式の制約のもとで，現在の消費 $c(0)$ と投資 $i(0)$ の最適配分問題を考える．個人の最適化問題は次のように定式化される．

$$\max \int_0^\infty e^{-\rho t}[U(c(t)) + V(g(t))]dt$$

subject to

$$\dot{k}(t) = [1 - \tau(t)]f(k(t)) - c(t) \tag{7}$$

Current value Hamiltonian を，

$$H_p = U(c) + V(g) + q[(1 - \tau)f(k) - c]$$

とおく．q は (7) 式の乗数であり，効用で測った資本の価格を表す．shadow price という．

1 階の条件は，

$$\frac{\partial H_p}{\partial c} = U'(c) - q = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial H_p}{\partial k} = q(1 - \tau)f'(k) = \rho q - \dot{q} \tag{9}$$

である[2]．

横断性条件は，

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} q(t)k(t) = 0 \tag{10}$$

で与えられる．資本そのものは効用を与えないので，遠い将来の資本の割引現在価値がゼロであることを意味する．

(7), (8), (9) 式および初期条件 $k(0)$ と横断性条件 (10) 式から，$c(0), i(0), q(0)$ が $\tau(t)$ の関数として求められる．また，時点 $t = 0$ において計画された消費 $c^*(t)$ と資本 $k^*(t)$ も $\tau(t)$ の関数として求められる．

[2] Present value Hamiltonian は，

$$H = e^{-\rho t}[U(c) + V(g)] + Q[(1 - \tau)f(k) - c]$$

と表せる（Q は乗数）．1 階の条件は，

$$\frac{\partial H}{\partial c} = e^{-\rho t}U'(c) - Q = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = Q(1 - \tau)f'(k) = -\dot{Q}$$

である．Current value と比較すると，2 つの乗数の間には，

$$Q = e^{-\rho t}q$$

の関係がある．この式から，

$$\dot{Q} = e^{-\rho t}(\dot{q} - \rho q)$$

が成り立つ．k に関する 1 階の条件に代入すると (9) 式が得られる．

2.3 政府の問題

時点 $t=0$ の政府は，個人の最適化行動を読み込みながら，予算制約のもとで個人の効用が最大となるように税率 $\tau(0)$ を決める．(5) 式を (1) 式に代入すると，政府の最適化問題は次のように定式化される．

$$\max \int_0^\infty e^{-\rho t}[U(c^*(t))+V(\tau(t)f(k^*(t)))]dt$$

ただし，$c^*(t), k^*(t)$ は，時点 $t=0$ において個人が計画した消費と資本を表す．いずれも，$\tau(t)$ を含む点に注意する．

$c^*(t), k^*(t)$ は陽表的に記述できないので，$c^*(t), k^*(t)$ の満たすべき条件である (7), (8), (9), (10) 式を利用する．以下，$*$ を省略する．

まず，(8) 式より，

$$c(t)=c(q(t)), \quad c'<0 \tag{11}$$

が得られる．政府は，計画された消費の代わりに計画された資本価格をコントロールする．

次に，(11) 式を (7) 式に代入する．

$$\dot{k}(t)=[1-\tau(t)]f(k(t))-c(q(t)) \tag{12}$$

他方，(9) 式より，

$$-\frac{\dot{q}(t)}{q(t)}=[1-\tau(t)]f'(k(t))-\rho \tag{13}$$

を得る．

時点 $t=0$ の税率 $\tau(0)$ を引き上げたとする．(12) 式より，投資 $i(0)=\dot{k}(0)$ が減る．したがって，将来の資源が減り，効用が下がる．(13) 式より，資本価格の上昇率 $-\dot{q}(0)/q(0)>0$ が小さくなる．(11) 式より，将来消費が増え，効用が上がる．また，公共財 $g(0)=\tau(0)f(k(0))$ が増えるので効用が上がる．政府は増税の費用と便益を勘案して税率を決める．

政府は，(12), (13) 式および横断性条件 (10) 式と初期条件 $k(0)$ を制約条件として，資本 k，資本価格 q，税率 τ をコントロールする．Current value Hamiltonian を，

$$H_g=U(c(q))+V(\tau f(k))+\lambda\left[(1-\tau)f(k)-c(q)\right]+\xi\left[\rho-(1-\tau)f'(k)\right]q$$

とおく．λ は (12) 式の乗数，ξ は (13) 式の乗数である．

1 階の条件は，

$$\frac{\partial H_g}{\partial \tau}=V'(\tau f(k))f(k)-\lambda f(k)+\xi f'(k)q=0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial H_g}{\partial k}=V'(\tau f(k))\tau f'(k)+\lambda(1-\tau)f'(k)-\xi(1-\tau)f''(k)q=\rho\lambda-\dot{\lambda} \tag{15}$$

$$\frac{\partial H_g}{\partial q}=U'(c)c'(q)-\lambda c'(q)+\xi\left[\rho-(1-\tau)f'(k)\right]=\rho\xi-\dot{\xi} \tag{16}$$

である．(14) 式の第 1 項は公共財が増える便益を表す．第 2 項は資本が減る費用を表す．第 3 項は資本価格の上昇率の低下から生じる便益を表す．

横断性条件は，

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)k(t)=0 \tag{17}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\xi(t)q(t)=0 \tag{18}$$

である．

(11), (12), (13), (14), (15), (16) 式および横断性条件 (10), (17), (18) 式より，$c(t), q(t), k(t), \tau(t), \lambda(t), \xi(t)$ が得られる．

3　特定化

本節では，効用関数と生産関数を特定化して前節のモデルの均衡を導出する．

効用関数，生産関数を，

$$U(c) = \ln c$$
$$V(g) = \ln g$$
$$f(k) = Ak$$

と特定化する．$A > 0$ は全要素生産性を表す定数である．

3.1　個人の問題

(7), (8), (9), (10) 式より，個人の最適化問題の解は，

$$\dot{k} = (1-\tau)Ak - c \tag{19}$$
$$\frac{1}{c} = q \tag{20}$$
$$q(1-\tau)A = \rho q - \dot{q} \tag{21}$$
$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} qk = 0 \tag{22}$$

で与えられる．

(20) 式より，

$$c = \frac{1}{q} \tag{23}$$

これを (19) 式に代入し，両辺に q をかける．

$$q\dot{k} = (1-\tau)Aqk - 1$$

他方，(21) の両辺に k をかける．

$$\dot{q}k = [\rho - (1-\tau)A]qk$$

ここで，時点 t における資本価値を，

$$x(t) = q(t)k(t)$$

とおく．積の微分を用いると，上の 2 つの式から，$x(t)$ の微分方程式が得られる．

$$\frac{dx}{dt} = \dot{q}k + q\dot{k} = \rho x - 1 \tag{24}$$

$x(t) = \rho^{-1}$ は明らかに (24) 式の解である．$x(t) \neq \rho^{-1}$ のとき，

$$\int \frac{\rho}{\rho x - 1} dx = \rho \int dt \Rightarrow \ln|\rho x - 1| = \rho t + c_0 \Rightarrow \rho x - 1 = Ce^{\rho t}$$

を得る．ただし，$C = \pm e^{c_0}$ は定数である．以上から，(24) 式の一般解は，

$$x(t) = \frac{1 + Ce^{\rho t}}{\rho} \tag{25}$$

である（C は定数）．

最後に，横断性条件 (22) 式を用いて，C の値を求める．(25) 式より，

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} x = \frac{C}{\rho} = 0$$

したがって，

$$x(t) = \rho^{-1} \tag{26}$$

を得る．個人は，資本価値が時間を通じて (26) 式の水準で一定となるように投資をおこなう．(23) 式より，時点 $t=0$ で計画された消費は，

$$c(t) = \rho k(t) \tag{27}$$

である．

(27) 式を (19) 式に代入すると，

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = [1-\tau(t)]A - \rho \tag{28}$$

を得る．したがって，時点 $t=0$ における投資は，

$$i^*(0) = \dot{k}(0) = [(1-\tau(0))A - \rho]k(0) \tag{29}$$

で与えられる．

3.2 政府の問題

政府の予算制約式は，

$$\tau(t)Ak(t) = g(t) \tag{30}$$

である．ただし，$k(t)$ は (28) 式で与えられる．

(27), (30) 式を目的関数に代入すると，政府の最適化問題は次のように定式化される．

$$\max \int_0^\infty e^{-\rho t}\left\{\ln[\rho k(t)] + \ln[\tau(t)Ak(t)]\right\} dt$$

subject to (28), taking $k(0)$ as given.

Current value Hamiltonian を，

$$H_g = \ln(\rho k) + \ln(\tau A k) + \lambda[(1-\tau)A - \rho]k$$

とおく．

1 階の条件は，

$$\frac{\partial H_g}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau} - \lambda A k = 0 \tag{31}$$

$$\frac{\partial H_g}{\partial k} = \frac{2}{k} + \lambda[(1-\tau)A - \rho] = \rho\lambda - \dot{\lambda} \tag{32}$$

横断性条件は，

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda k = 0 \tag{33}$$

時点 t の資本価値を，$z = \lambda k$ とおく．(31) 式より，

$$\tau = \frac{1}{Az} \tag{34}$$

である．

(28) 式の両辺に λ をかける．

$$\lambda\dot{k} = [(1-\tau)A - \rho]z$$

(32) 式の両辺に k をかける．

$$\dot{\lambda}k = \rho z - [(1-\tau)A - \rho]z - 2$$

したがって，

$$\frac{dz}{dt} = \dot{\lambda}k + \lambda\dot{k} = \rho z - 2$$

この $z(t)$ に関する微分方程式を解くと，

$$z(t) = \frac{2 + De^{\rho t}}{\rho}$$

ただし，D は定数である．

ここで，(33) 式より，

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} z(t) = \frac{D}{\rho} = 0$$

なので，

$$z(t) = \frac{2}{\rho} \tag{35}$$

が成り立つ．政府は，資本価値が (35) 式の水準で一定となるように税率を決定する．

(35) 式を (34) 式に代入すると，

$$\tau(t) = \frac{\rho}{2A} \tag{36}$$

が得られる．時点 $t = 0$ における所得税率は $\tau(0) = \rho/(2A)$ である．$\tau(0) < 1$ であるための条件は，$A > \rho/2$ である．

(36) 式を (30) 式に代入すると，

$$g(t) = \frac{1}{2}\rho k(t)$$

が得られる．(27) 式と比較すると，公共財の水準は私的財消費の半分である．

(28) 式より，

$$\dot{k} = \left(A - \frac{3}{2}\rho\right) k$$

を得る．(36) 式の政策のもとでの経済成長率は，

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{k}}{k} = A - \frac{3}{2}\rho$$

である．

時間選好率 ρ，全要素生産性 A はともに定数なので，(36) 式の政策は時間整合的である（ある時点で政策変更が許されても変更しない）．

4 社会的最適

本節では社会的最適解を導出し，前節のシュタッケルベルク均衡と比較する．(3) 式の生産関数，(4) 式の資本蓄積方程式，そして (6) 式の資源制約式を用いる．

次の最適化問題の解を社会的最適と定義する．

$$\max_{c(t),\, g(t),\, k(t)} \int_0^\infty e^{-\rho t}[U(c(t)) + V(g(t))]dt$$

subject to

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - g(t) \tag{37}$$

taking $k(0)$ as given.

Current value Hamiltonian を，

$$H = U(c) + V(g) + \mu[f(k) - c - g]$$

とおく（μ は乗数）．

1 階の条件は,

$$\frac{\partial H}{\partial c} = U'(c) - \mu = 0 \tag{38}$$

$$\frac{\partial H}{\partial g} = V'(g) - \mu = 0 \tag{39}$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = \mu f'(k) = \rho\mu - \dot{\mu} \tag{40}$$

(37), (38), (39), (40) 式および，初期条件 $k(0)$ と横断性条件

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\mu(t)k(t) = 0 \tag{41}$$

より，$c(t), g(t), k(t), \mu(t)$ が求められる．

3 節と同様に，効用関数と生産関数を特定化する．(38), (39) 式より,

$$c = g = \frac{1}{\mu}$$

(37) 式に代入し，両辺に μ をかける．

$$\mu\dot{k} = \mu Ak - 2$$

他方，(40) 式より,

$$\dot{\mu} = (\rho - A)\mu$$

時点 t における資本価値を,

$$\kappa(t) = \mu(t)k(t)$$

とおく．上の 2 つの式を用いると，$\kappa(t)$ の微分方程式が得られる．

$$\frac{d\kappa}{dt} = \dot{\mu}k + \mu\dot{k} = \rho\kappa - 2$$

前節と同様にして一般解を求め，(41) 式を用いると,

$$\kappa(t) = \frac{2}{\rho}$$

を得る．この式を利用すると，社会的最適は,

$$c^*(t) = g^*(t) = \frac{1}{2}\rho k^*(t) \tag{42}$$

$$k^*(t) = k(0)e^{(A-\rho)t} \tag{43}$$

である．経済成長率は $(A - \rho)$ である．

社会的最適と前節のシュタッケルベルク均衡を比較する．(42) 式より，社会的に最適な公共支出対 GDP 比率は,

$$\frac{g^*(t)}{y^*(t)} = \frac{\rho}{2A}$$

である．シュタッケルベルク均衡においてもこの条件は成立する．

(27) 式より，シュタッケルベルク均衡での消費水準は,

$$\frac{c(t)}{y(t)} = \frac{\rho}{A}$$

である．(42) 式と比較すると，社会的最適水準よりも高いことが分かる．(38), (39) 式より，私的財と公共財の限界効用が一致するように資源を配分するのが社会的に望ましい．しかし，個人は公共財の供給水準を所与として行動するため，私的財消費が過大になる．

シュタッケルベルク均衡では私的財消費が多い分，投資が少ない．したがって，成長率は最適水準よりも低くなる．

5 Concluding Remarks

3 節の特定化されたモデルにおける均衡政策とは，時点 $t = 0$ において所得税率を (36) 式の水準に設定し，その後税率変更をおこなわないことである．なぜこのような政策をおこなうのだろうか.

一般に，時点 $t = 0$ における資本価格 $q(0)$ は操作変数（ジャンプ変数）である．政府は税率 $\tau(0)$ をコントロールすることで，経済を望ましい経路に誘導できるはずである．しかし，(26) 式から明らかなように，個人の最適化行動と整合的な資本価格は定数 $q(0) = 1/(\rho k(0))$ であり，政策的にコントロールできない．同様に，初期消費 $c(0)$ も政策的にコントロールできない．政府にできるのは，初期の公共財 $g(0)$ を最適水準にすることだけである．(42) 式から分かるように，最適な政府支出対 GDP 比率は一定なので，所得税率は時間を通じて一定にするのが望ましい.

初期の資本価格 $q(0)$，あるいは初期消費 $c(0)$ が操作変数でないというのは特殊な状況である．3 節のモデルでの政策が時間整合的であるという結果は，効用関数と生産関数の特定化に大きく依存しているという点に留意する必要があろう.

参考文献

[1] Xie D. (1997) On time inconsistency: A technical issue in Stackelberg differential games. *Journal of Economic Theory*. 76, 412-430.