資産効用と最適な資本課税：「資本主義の精神」の経済理論

宮澤和俊*

1 Introduction

資本課税に関する理論では，Chamley (1986)-Judd (1985) ルールが有名である．このルールは，長期的には資本所得に課税しないのが望ましいことを主張している．その後，このルールを修正する理論が継続的に提唱されている[1]．本稿では，Li et al. (2020) のモデルを紹介する．Li et al. (2020) は，資産所有のステータスが効用を生むと仮定し，長期の資本所得税率を分析している．税率は一般的にゼロでないこと，そして資産の限界効用が消費の限界効用よりも早く逓減するとき，資本所得に課税するのが望ましいことを理論的に示している．なお，彼らの論文のタイトルにあるように，資産効用を資本主義の精神 (spirit of capitalism) と解釈している．

次節ではモデルを導入する．3 節では最適政策を導出する．最後の節はまとめである．

2 モデル

離散時間のラムゼーモデルを用いる．個人は消費と余暇に加え，資産（資本）から効用を得ると仮定する．企業は労働と資本を用いて財を生産する．政府は，労働所得，資本所得への課税と国債を用いて政府支出を賄う．閉鎖経済において，財，労働，資本の 3 つの市場が存在する．市場は完全競争であると仮定する．

2.1 モデルの設定

時点 $t = 0$ における個人の効用関数を

$$U_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, l_t, k_t) \tag{1}$$

とする．c_t は t 期の消費，l_t は余暇，k_t は資本を表す．$0 < \beta < 1$ は私的割引要素である．

個人は毎期，1 単位の時間を余暇と労働に配分する．t 期の労働を n_t とすると，時間制約は次式で与えられる．

$$1 = l_t + n_t \tag{2}$$

t 期の個人の予算制約式は，

$$w_t n_t + r_t k_t + R_{t-1} x_{t-1} = c_t + i_t + x_t + T_t \tag{A1}$$

で与えられる[2]．w_t は賃金率，r_t は利子率を表す．$w_t n_t$ が労働所得，$r_t k_t$ が資本所得である．

x_t は国債購入を表す．R_{t-1} は前期の国債利子を表しており，$R_{t-1} x_{t-1}$ が政府からの受取りを表す．i_t は投資，T_t は税金である．

資本蓄積方程式は，

$$k_{t+1} = i_t + (1 - \delta) k_t \tag{A2}$$

*Faculty of Economics, Doshisha Univeristy, Kamigyo, Kyoto 602-8580 Japan. kazu@mail.doshisha.ac.jp

[1] Lansing (1999) は，資本家の効用を対数関数で特定化したとき，最適資本所得税率は一般的にはゼロでないこと，さらに，労働者の厚生を重視する社会では税率が正になることを示している．

[2] 式番号は，Li et al. (2020) に合わせている．論文にない式は (A1) などと表す．

である．$0 \leq \delta \leq 1$ は資本減耗率を表す.

企業は労働と資本を用いて財を生産する．生産関数を，

$$y_t = F(k_t, n_t)$$

とする．y_t は産出，k_t は資本投入，n_t は労働投入を表す.

要素市場が完全競争的であるとすると，要素価格は投入要素の限界生産力に一致する.

$$\begin{aligned} r_t &= F_k(k_t, n_t) \\ w_t &= F_n(k_t, n_t) \end{aligned} \tag{13}$$

技術が規模に関して収穫一定であると仮定すると，利潤はゼロである.

t 期の政府予算制約式は，

$$T_t + x_t = g_t + R_{t-1}x_{t-1} \tag{A3}$$

で与えられる．g_t は政府支出を表す．左辺が歳入を，右辺が歳出を表す.

t 期の資源制約式は次式で与えられる.

$$y_t = c_t + i_t + g_t \tag{A4}$$

ワルラス法則より，(A4) 式は他の式から導出できる[3].

2.2 税制と国債

政府は労働所得税と資本所得税を課すと仮定する.

$$T_t = \tau_t^k r_t k_t + \tau_t^n w_t n_t \tag{A5}$$

τ_t^k は資本所得税率，τ_t^n は労働所得税率を表す.

以下，Li et al. (2020) にしたがい，国債購入 x_t の代わりに，t 期の政府からの受取り（国債償還費）b_t を用いる.

$$b_t = R_{t-1}x_{t-1} \tag{A6}$$

(A5), (A6) 式を (A3) 式に代入する．政府予算制約式は，

$$\tau_t^k r_t k_t + \tau_t^n w_t n_t + \frac{b_{t+1}}{R_t} = g_t + b_t \tag{4}$$

と表すことができる.

2.3 効用最大化問題

(A2), (A5), (A6) 式を (A1) 式に代入する．家計予算制約式は，

$$(1-\tau_t^k) r_t k_t + (1-\tau_t^n) w_t n_t + (1-\delta)k_t + b_t = c_t + k_{t+1} + \frac{b_{t+1}}{R_t} \tag{5}$$

と表せる.

家計の効用最大化問題は次のように定式化される.

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1-n_t, k_t) \quad \text{subject to (5)}$$

[3] (A4) 式の右辺を変形すると，

$$\begin{aligned} c_t + i_t + g_t &= w_t n_t + r_t k_t + R_{t-1}x_{t-1} - x_t - T_t + g_t \\ &= w_t n_t + r_t k_t \\ &= y_t \end{aligned}$$

ラグランジュ関数を，

$$L_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ u(c_t, 1-n_t, k_t) + \lambda_t \left[(1-\tau_t^k) r_t k_t + (1-\tau_t^n) w_t n_t + (1-\delta) k_t + b_t - c_t - k_{t+1} - \frac{b_{t+1}}{R_t} \right] \right\}$$

とおく（λ_t はラグランジュ乗数）．

1 階の条件は，

$$\frac{\partial L_0}{\partial c_t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_t}{\partial c_t} - \lambda_t = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial n_t} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial u_t}{\partial l_t} + \lambda_t (1-\tau_t^n) w_t = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial k_{t+1}} = 0 \Rightarrow -\lambda_t + \beta \left\{ \frac{\partial u_{t+1}}{\partial k_{t+1}} + \lambda_{t+1} \left[(1-\tau_{t+1}^k) r_{t+1} + 1 - \delta \right] \right\} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial b_{t+1}} = 0 \Rightarrow -\frac{\lambda_t}{R_t} + \beta \lambda_{t+1} = 0 \tag{9}$$

である．

(6), (7) 式より，

$$\frac{\partial u_t / \partial l_t}{\partial u_t / \partial c_t} = (1-\tau_t^n) w_t \tag{10}$$

が得られる．余暇を 1 単位増やすことは，効用で測って，左辺の限界代替率分の消費を増やすことと等価である．余暇を 1 単位増やすと，可処分所得が右辺の実質賃金率だけ失われる．(10) 式の左辺は余暇の限界便益を，右辺は限界費用を表す．

(6), (8) 式より，

$$\frac{\partial u_t}{\partial c_t} = \beta \left\{ \frac{\partial u_{t+1}}{\partial k_{t+1}} + \frac{\partial u_{t+1}}{\partial c_{t+1}} \left[(1-\tau_{t+1}^k) r_{t+1} + 1 - \delta \right] \right\} \tag{11}$$

が得られる．

現在消費を 1 単位減らして投資を 1 単位増やすとする．(11) 式の左辺は，効用で測った投資の限界費用を表す．投資が 1 単位増えると，将来消費が $(1-\tau_{t+1}^k) r_{t+1} + 1 - \delta$ 単位増える．右辺第 2 項は将来消費で測った限界便益を表す．さらに，投資は将来の資本を増やすことで直接的に効用を高める．右辺第 1 項は，spirit of capitalism 効果を表している．将来の効用は β で割り引かれるため，(11) 式の右辺が投資の限界便益を表している．

(6), (9) 式より，

$$R_t = (1-\tau_{t+1}^k) r_{t+1} + 1 - \delta + \frac{\partial u_{t+1} / \partial k_{t+1}}{\partial u_{t+1} / \partial c_{t+1}} \tag{A7}$$

が得られる．

投資を 1 単位増やす代わりに，国債購入 x_t を 1 単位減らすとする．(A6) 式より，$t+1$ 期の政府からの受取り b_{t+1} が R_t 単位減る．(A7) 式の左辺は，将来消費で測った投資の限界費用を表す．他方，投資を 1 単位増やすと，将来消費が $(1-\tau_{t+1}^k) r_{t+1} + 1 - \delta$ 単位増える．さらに，spirit of capitalism 効果により，効用が $\partial u_{t+1} / \partial k_{t+1}$ だけ増える．この効用の増分は，$(\partial u_{t+1} / \partial k_{t+1}) / (\partial u_{t+1} / \partial c_{t+1})$ だけ将来消費が増えたものと同じである．したがって，(A7) 式の右辺は将来消費で測った投資の限界便益を表す．(A7) 式は，投資と国債購入の裁定条件を意味している．spirit of capitalism 効果がない場合は（$\partial u_{t+1} / \partial k_{t+1} = 0$），

$$R_t = (1-\tau_{t+1}^k) r_{t+1} + 1 - \delta$$

が成り立つ．t 期の国債利子は，$t+1$ 期の課税後利子率（プラス資本の残存価値）に一致する．spirit of capitalism 効果がある場合には（$\partial u_{t+1} / \partial k_{t+1} > 0$），

$$R_t > (1-\tau_{t+1}^k) r_{t+1} + 1 - \delta$$

が成り立つ．資産所有は効用を生じるが，国債保有は効用を生じないと仮定しているため，国債利子は資本の実質利子率よりも高めに設定される．

(11) 式を用いて，$\partial u_{t+1}/\partial c_{t+1}$ の代わりに，$\partial u_t/\partial c_t$ を用いる．(A7) 式は，

$$R_t = \frac{(1-\tau_{t+1}^k)r_{t+1} + 1 - \delta}{1 - \beta\frac{\partial u_{t+1}/\partial k_{t+1}}{\partial u_t/\partial c_t}} \tag{12}$$

と変形できる．資産効用 $\partial u_{t+1}/\partial k_{t+1}$ が大きいほど国債利子が高めに設定されることが分かる．

2.4 実行可能性条件

政府は，家計の効用最大化行動を読み込みつつ，効用関数 (1) 式が最大となる政策を決定する．政府の予算制約である (4) 式の代わりに資源制約 (5) 式を用いる．さらに，個人が最適選択をしたときの家計の予算制約式が満たされることを意味する，政策の実行可能性 (implementability) に関する条件が制約条件に追加される．

命題 1 政策の実行可能性条件は次式で与えられる．

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left(\frac{\partial u_t}{\partial c_t}c_t - \frac{\partial u_t}{\partial l_t}n_t + \frac{\partial u_t}{\partial k_t}k_t\right) = \frac{\partial u_0}{\partial c_0}\left\{[(1-\tau_0^k)r_0 + 1 - \delta]k_0 + b_0\right\} + \frac{\partial u_0}{\partial k_0}k_0 \tag{14}$$

証明. Arrow-Debreu price を，

$$q_t = \prod_{i=0}^{t-1}R_i^{-1} = \frac{1}{R_0 R_1 \cdots R_{t-1}} \tag{A8}$$

とおく．ただし，$q_0 = 1$ である．

以下，家計の予算制約 (5) 式および最適化条件 (6)-(9) 式を q_t を用いて書き換える．

(9) 式より，

$$\lambda_t = \frac{\lambda_{t-1}}{\beta R_{t-1}} = \frac{\lambda_{t-2}}{\beta^2 R_{t-1}R_{t-2}} = \cdots = \frac{\lambda_0}{\beta^t R_{t-1}R_{t-2}\cdots R_0} = \frac{q_t\lambda_0}{\beta^t}$$

なので，(6) 式を用いると，

$$q_t = \beta^t\frac{\frac{\partial u_t}{\partial c_t}}{\frac{\partial u_0}{\partial c_0}} \tag{A9}$$

が成り立つ．

(5) 式より，t 期の家計の予算制約式は，

$$b_t = A_t + \frac{b_{t+1}}{R_t}$$
$$A_t = c_t + k_{t+1} - [(1-\tau_t^k)r_t + 1 - \delta]k_t - (1-\tau_t^n)w_t n_t$$

と表せる．b_t を順に消去することにより，予算制約式を 0 時点の割引現在価値に換算する．

$$\begin{aligned}
b_0 &= A_0 + \frac{b_1}{R_0}\\
&= A_0 + \frac{1}{R_0}\left(A_1 + \frac{b_2}{R_1}\right)\\
&\cdots\\
&= A_0 + \frac{A_1}{R_0} + \frac{A_2}{R_0R_1} + \cdots + \lim_T \frac{b_T}{R_0R_1\cdots R_{T-1}}
\end{aligned}$$

したがって，

$$b_0 = \sum_{t=0}^{\infty} q_t A_t + \lim_T q_T b_T \tag{A10}$$

が得られる．

A_t には k_t と k_{t+1} が含まれるので整理する．

$$x_t = k_{t+1} - [(1-\tau_t^k)r_t + 1 - \delta]k_t$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{\infty} q_t x_t &= \sum_{t=0}^{\infty} q_t \left\{k_{t+1} - [(1-\tau_t^k) r_t + 1 - \delta] k_t\right\} \\
&= \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} q_t \left\{k_{t+1} - [(1-\tau_t^k) r_t + 1 - \delta] k_t\right\} \\
&= \lim_{T\to\infty} \left\{\sum_{t=0}^{T} q_t k_{t+1} - \sum_{t=1}^{T} q_t [(1-\tau_t^k) r_t + 1 - \delta] k_t\right\} - [(1-\tau_0^k) r_0 + 1 - \delta] k_0 \\
&= \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T-1} \left\{q_t - q_{t+1}[(1-\tau_{t+1}^k) r_{t+1} + 1 - \delta]\right\} k_{t+1} - [(1-\tau_0^k) r_0 + 1 - \delta] k_0 + \lim_{T\to\infty} q_T k_{T+1} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \left\{q_t - q_{t+1}[(1-\tau_{t+1}^k) r_{t+1} + 1 - \delta]\right\} k_{t+1} - [(1-\tau_0^k) r_0 + 1 - \delta] k_0 + \lim_{T\to\infty} q_T k_{T+1} \qquad \text{(A11)}
\end{aligned}$$

ここで，(6), (9) 式から得られる裁定条件

$$R_t = (1-\tau_{t+1}^k) r_{t+1} + 1 - \delta + \frac{\frac{\partial u_{t+1}}{\partial k_{t+1}}}{\frac{\partial u_{t+1}}{\partial c_{t+1}}} \qquad \text{(A7)}$$

の両辺に q_{t+1} にかける．$q_{t+1} R_t = q_t$ であることから，

$$q_t - q_{t+1}[(1-\tau_{t+1}^k) r_{t+1} + 1 - \delta] = q_{t+1} \frac{\frac{\partial u_{t+1}}{\partial k_{t+1}}}{\frac{\partial u_{t+1}}{\partial c_{t+1}}} \qquad \text{(A12)}$$

を得る．この式を (A11) 式に代入すると，

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t x_t = \sum_{t=0}^{\infty} q_{t+1} \frac{\frac{\partial u_{t+1}}{\partial k_{t+1}}}{\frac{\partial u_{t+1}}{\partial c_{t+1}}} k_{t+1} - [(1-\tau_0^k) r_0 + 1 - \delta] k_0 + \lim_{T\to\infty} q_T k_{T+1} \qquad \text{(A13)}$$

が成り立つ．

(A13) 式を (A10) 式に代入する．

$$b_0 = \sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[c_t - (1-\tau_t^n) w_t n_t\right] + \sum_{t=0}^{\infty} q_{t+1} \frac{\frac{\partial u_{t+1}}{\partial k_{t+1}}}{\frac{\partial u_{t+1}}{\partial c_{t+1}}} k_{t+1} - [(1-\tau_0^k) r_0 + 1 - \delta] k_0 + \lim_{T\to\infty} q_T k_{T+1} + \lim_{T} q_T b_T$$

横断性条件

$$\lim_{T\to\infty} q_T k_{T+1} = 0$$
$$\lim_{T} q_T b_T = 0$$

を仮定すると，家計の予算制約式は，

$$b_0 + [(1-\tau_0^k) r_0 + 1 - \delta] k_0 + \sum_{t=0}^{\infty} q_t (1-\tau_t^n) w_t n_t = \sum_{t=0}^{\infty} \left(q_t c_t + q_{t+1} \frac{\frac{\partial u_{t+1}}{\partial k_{t+1}}}{\frac{\partial u_{t+1}}{\partial c_{t+1}}} k_{t+1} \right) \qquad \text{(A14)}$$

と表される．

さらに，(6), (7) 式より，

$$\frac{\frac{\partial u_t}{\partial l_t}}{\frac{\partial u_t}{\partial c_t}} = (1-\tau_t^n) w_t \qquad (10)$$

が成り立つ．(A14) 式に代入すると，

$$b_0 + [(1-\tau_0^k) r_0 + 1 - \delta] k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \left(q_t c_t - q_t \frac{\frac{\partial u_t}{\partial l_t}}{\frac{\partial u_t}{\partial c_t}} n_t + q_{t+1} \frac{\frac{\partial u_{t+1}}{\partial k_{t+1}}}{\frac{\partial u_{t+1}}{\partial c_{t+1}}} k_{t+1} \right) \qquad \text{(A15)}$$

を得る．(A15) 式の左辺は，時点 $t=0$ での初期資産を表す．右辺は順に，(i) 消費の割引現在価値の総和，(ii) 消費で測った余暇の割引現在価値の総和，(iii) 消費で測った資本の割引現在価値の総和を表す．

最後に，(A9) 式を用いて q_t を消去する．

$$b_0 + [(1-\tau_0^k)r_0 + 1 - \delta]k_0 = \sum_{t=0}^{\infty}\left(\beta^t \frac{\frac{\partial u_t}{\partial c_t}}{\frac{\partial u_0}{\partial c_0}} c_t - \beta^t \frac{\frac{\partial u_t}{\partial l_t}}{\frac{\partial u_0}{\partial c_0}} n_t + \beta^{t+1} \frac{\frac{\partial u_{t+1}}{\partial k_{t+1}}}{\frac{\partial u_0}{\partial c_0}} k_{t+1}\right)$$

両辺に $(\partial u_0/\partial k_0)\, k_0/(\partial u_0/\partial c_0)$ を加える．横断性条件より，$\lim_{t\to 0} \beta^{t+1}k_{t+1} = 0$ なので，

$$b_0 + [(1-\tau_0^k)r_0 + 1 - \delta]k_0 + \frac{\frac{\partial u_0}{\partial k_0}}{\frac{\partial u_0}{\partial c_0}} k_0 = \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left(\frac{\frac{\partial u_t}{\partial c_t}}{\frac{\partial u_0}{\partial c_0}} c_t - \frac{\frac{\partial u_t}{\partial l_t}}{\frac{\partial u_0}{\partial c_0}} n_t + \frac{\frac{\partial u_t}{\partial k_t}}{\frac{\partial u_0}{\partial c_0}} k_t\right)$$

を得る．両辺に $\partial u_0/\partial c_0$ をかけると (14) 式が得られる． □

3 最適政策 Ramsey problem

時点 $t=0$ の政府の問題は次のように定式化される．

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1-n_t, k_t)$$

subject to the resource constraint,

$$F(k_t, n_t) + (1-\delta)k_t = c_t + k_{t+1} + g_t \tag{3}$$

and the implementability condition,

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left(\frac{\partial u_t}{\partial c_t}c_t - \frac{\partial u_t}{\partial l_t}n_t + \frac{\partial u_t}{\partial k_t}k_t\right) = \frac{\partial u_0}{\partial c_0}\left\{[(1-\tau_0^k)r_0 + 1 - \delta]k_0 + b_0\right\} + \frac{\partial u_0}{\partial k_0}k_0 \tag{14}$$

taking k_0, b_0, τ_0^k, and $\{g_t\}_{t=0}^{\infty}$ as given.

(14) 式の右辺を $\tilde{A}$ とおく．ラグランジュ関数を，

$$\begin{aligned} J = &\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left\{u(c_t, 1-n_t, k_t) + \theta_t[F(k_t, n_t) + (1-\delta)k_t - c_t - k_{t+1} - g_t]\right\} \\ &+ \Phi\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left(\frac{\partial u_t}{\partial c_t}c_t - \frac{\partial u_t}{\partial l_t}n_t + \frac{\partial u_t}{\partial k_t}k_t\right) - \tilde{A}\right\}\end{aligned}$$

とおく（θ_t, Φ はラグランジュ乗数）．

整理すると，

$$J = \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left\{U(c_t, n_t, k_t, \phi) + \theta_t[F(k_t, n_t) + (1-\delta)k_t - c_t - k_{t+1} - g_t]\right\} - \Phi\tilde{A}$$

と表せる．ただし，

$$U(c_t, n_t, k_t, \Phi) = u(c_t, 1-n_t, k_t) + \Phi\left(\frac{\partial u_t}{\partial c_t}c_t - \frac{\partial u_t}{\partial l_t}n_t + \frac{\partial u_t}{\partial k_t}k_t\right) \tag{A16}$$

である．

c_t $(t \geq 1)$, n_t $(t \geq 1)$, k_{t+1} $(k \geq 0)$ に関する 1 階の条件は，

$$\frac{\partial U_t}{\partial c_t} - \theta_t = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial U_t}{\partial n_t} + \theta_t F_{n,t} = 0 \tag{16}$$

$$-\theta_{t+1} + \beta\left(\frac{\partial U_{t+1}}{\partial k_{t+1}} + F_{k,t+1} + 1 - \delta\right) = 0 \tag{17}$$

である．ここで，(A16) 式より，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_t}{\partial c_t} &= \frac{\partial u_t}{\partial c_t} + \Phi\left(\frac{\partial^2 u_t}{\partial c_t^2}c_t + \frac{\partial u_t}{\partial c_t} - \frac{\partial^2 u_t}{\partial l_t \partial c_t}n_t + \frac{\partial^2 u_t}{\partial k_t \partial c_t}k_t\right) \\
\frac{\partial U_t}{\partial n_t} &= -\frac{\partial u_t}{\partial l_t} + \Phi\left(-\frac{\partial^2 u_t}{\partial c_t l_t}c_t + \frac{\partial^2 u_t}{\partial l_t^2}n_t - \frac{\partial u_t}{\partial l_t} - \frac{\partial^2 u_t}{\partial k_t l_t}k_t\right) \\
\frac{\partial U_{t+1}}{\partial k_{t+1}} &= \frac{\partial u_{t+1}}{\partial k_{t+1}} + \Phi\left(\frac{\partial^2 u_{t+1}}{\partial c_{t+1}\partial k_{t+1}}c_{t+1} - \frac{\partial^2 u_{t+1}}{\partial l_{t+1}\partial k_{t+1}}n_{t+1} + \frac{\partial^2 u_{t+1}}{\partial k_{t+1}^2}k_{t+1} + \frac{\partial u_{t+1}}{\partial k_{t+1}}\right)
\end{aligned}$$

である．

以下，次の仮定をおく．

仮定 1. ある $T \geq 0$ が存在し，任意の $t \geq T$ について，$g_t = g$（一定）である．

仮定 2. 長期的に，消費，労働，資本は定常値 c, n, k をとる．

仮定 3. 消費，余暇，資本の効用は補完的．$u_{ij} \geq 0$ for $\forall i \neq j (= c, l, k)$

このとき，次の命題が成立する．

命題 2 定常状態において資本税率について次の関係式が成り立つ．

$$\tau^k \gtreqless 0 \Leftrightarrow \eta_1 \frac{\partial u}{\partial k} - \eta_2 \frac{\partial u}{\partial c} \gtreqless 0 \tag{18}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \frac{\partial^2 u}{\partial c^2}c - \frac{\partial^2 u}{\partial l \partial c}n + \frac{\partial^2 u}{\partial k \partial c}k > 0 \\
\eta_2 &= \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial k}c - \frac{\partial^2 u}{\partial l \partial k}n + \frac{\partial^2 u}{\partial k^2}k > 0
\end{aligned}$$

証明. 1 階の条件を定常状態で評価する．2 階微分を u_{ij} で表記する．

(15) 式より，

$$\theta = (1+\Phi)\frac{\partial u}{\partial c} + \Phi\left(u_{cc}c - u_{lc}n + u_{kc}k\right) = (1+\Phi)\frac{\partial u}{\partial c} + \eta_1 \Phi \tag{A17}$$

(17) 式より，

$$\theta = \beta\left[(1+\Phi)\frac{\partial u}{\partial k} + \Phi\left(u_{ck}c - u_{lk}n + u_{kk}k_{t+1}\right) + \theta(F_k + 1 - \delta)\right]$$

したがって，

$$\theta[1 - \beta(F_k + 1 - \delta)] = \beta\left[(1+\Phi)\frac{\partial u}{\partial k} + \eta_2 \Phi\right] \tag{A18}$$

(16) 式より，

$$\theta F_n = (1+\Phi)\frac{\partial u}{\partial l} + \eta_3 \Phi \tag{A19}$$

ただし，

$$\eta_3 = u_{cl}c - u_{ll}n + u_{kl}k > 0$$

である．

この 3 式と，資源制約式，実行可能性条件の計 5 本の方程式から，c, n, k, θ, Φ が求められる．

［資本所得税率 τ^k］

(9) 式より，定常状態では $\lambda_{t+1} = \lambda_t$ なので，

$$R = \frac{1}{\beta}$$

が成り立つ．裁定条件 (A7) 式より，

$$\frac{1}{\beta} = (1-\tau^k)F_k + 1 - \delta + \frac{\frac{\partial u}{\partial k}}{\frac{\partial u}{\partial c}}$$

したがって，

$$\tau^k F_k = F_k + 1 - \delta + \frac{\frac{\partial u}{\partial k}}{\frac{\partial u}{\partial c}} - \frac{1}{\beta}$$

である．

(A18) 式を利用すると，上式は，

$$\tau^k F_k = \frac{\frac{\partial u}{\partial k}}{\frac{\partial u}{\partial c}} - \frac{1}{\theta}\left[(1+\Phi)\frac{\partial u}{\partial k} + \eta_2 \Phi\right] \tag{A20}$$

と変形できる．

(A17), (A19) 式より，

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial c} & \eta_1 \\ \frac{\partial u}{\partial l} & \eta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\Phi}{\theta} \\ \frac{\Phi}{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ F_n \end{pmatrix}$$

行列式を，$\Delta = \eta_3 \frac{\partial u}{\partial c} - \eta_1 \frac{\partial u}{\partial l} > 0$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\Phi}{\theta} \\ \frac{\Phi}{\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \eta_3 - \eta_1 F_n \\ \frac{\partial u}{\partial c} F_n - \frac{\partial u}{\partial l} \end{pmatrix} \tag{A21}$$

が得られる．

(A21) 式を (A20) 式に代入して整理すると，

$$\tau^k F_k = \frac{\Phi}{\theta \frac{\partial u}{\partial c}} \left(\eta_1 \frac{\partial u}{\partial k} - \eta_2 \frac{\partial u}{\partial c} \right) \tag{A22}$$

が得られる．

ラグランジュ乗数は正なので，(18) 式が証明された．

［労働所得税率 τ^n］

(10) 式より，

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial l}}{\frac{\partial u}{\partial c}} = (1-\tau^n)F_n$$

したがって，

$$\tau^n F_n \frac{\partial u}{\partial c} = F_n \frac{\partial u}{\partial c} - \frac{\partial u}{\partial l} \tag{A23}$$

である．

(A17), (A19) 式を用いて右辺の $\partial u/\partial c, \partial u/\partial l$ を消去する．

$$\begin{aligned} \tau^n F_n \frac{\partial u}{\partial c} &= F_n \times \frac{\theta - \eta_1 \Phi}{1+\Phi} - \frac{\theta F_n - \eta_3 \Phi}{1+\Phi} \\ &= \frac{\Phi}{1+\Phi} (\eta_3 - \eta_1 F_n) \end{aligned} \tag{A24}$$

ラグランジュ乗数は正なので，τ^n の符号は，$(\eta_3 - \eta_1 F_n)$ の符号に一致する． □

命題 2 を解釈する．まず，資産効果がないケースを考える（$\partial u/\partial k = 0$）．$\eta_2 = 0$ なので，$\tau^k = 0$ が成立する．長期の資本所得税率はゼロであるという Chamley (1986)-Judd (1985) ルールが成立する．(A24) 式より，

$$\begin{aligned} \eta_3 - \eta_1 F_n &= u_{cl} c - u_{ll} n - (u_{cc} c - u_{lc} n) F_n \\ &= (u_{cl} - u_{cc} F_n) c + (-u_{ll} + u_{cl} F_n) n > 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．長期の労働所得税率は正である．

次に，効用関数を加法分離形に特定化する．

$$u(c, 1-n, k) = \alpha_c u(c) + \alpha_n v(1-n) + \alpha_k w(k) \tag{19}$$

このとき，

$$\eta_1 \frac{\partial u}{\partial k} - \eta_2 \frac{\partial u}{\partial c} = \alpha_c \alpha_k u'(c) w'(k) \left(\sigma_k - \sigma_c\right)$$

と変形できる．ここで，σ_k, σ_c はそれぞれ資本と消費の限界効用の弾力性を表す.

$$\sigma_k = -\frac{w''(k)k}{w'(k)} > 0$$
$$\sigma_c = -\frac{u''(c)c}{u'(c)} > 0$$

資本の限界効用の弾力性が消費の限界効用の弾力性よりも大きいとき，$\tau^k > 0$ が成り立つ．弾力性が大きいとは，限界効用が早く逓減することを意味する．資産保有の限界的な厚生効果が小さいときは，資本に課税するのが望ましい．逆に資本の限界効用の弾力性が消費のそれよりも小さいときは，資本に補助金を出すのが望ましい.

4 Concluding remarks

参考文献

[1] Chamley C. (1986) Optimal taxation of capital income in general equilibrium with infinite lives. *Econometrica*. 80, 607-622.

[2] Judd KL. (1985) Redistributive taxation in a simple perfect foresight model. *Journal of Public Economics*. 28, 59-83.

[3] Lansing KJ. (1999) Optimal redistributive capital taxation in a neoclassical growth model. *Journal of Public Economics*. 73, 423-453.

[4] Li F, Wang G, Zou H-F. (2020) The spirit of capitalism and optimal capital taxation. *Economics Letters*. 192, 109243, 1-5.