Solow model

I. 次のマクロモデルに関する各問いに答えよ．導出過程を明記すること．

$$\text{財市場均衡式} \quad Y_t = C_t + I_t \tag{1}$$

$$\text{投資関数} \quad I_t = sY_t \tag{2}$$

$$\text{生産関数} \quad Y_t = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \tag{3}$$

$$\text{資本蓄積方程式} \quad K_{t+1} = I_t \tag{4}$$

$$\text{人口成長率} \quad \frac{L_{t+1}}{L_t} = n \tag{5}$$

下付きの t は時点を表す．Y は国民所得，C は消費，I は投資，K は資本，L は労働 (人口) である．$0 < s < 1$ は投資率 (定数)，$0 < \alpha < 1$ は資本分配率 (定数)，$A > 0$ は TFP(定数)，$n > 0$ は租人口成長率 (定数) である．

1. t 時点の 1 人あたり資本を，

$$k_t = \frac{K_t}{L_t} \tag{6}$$

とおく．(2), (3), (4), (5), (6) 式を用いて，k_t の漸化式

$$k_{t+1} = \frac{sA}{n} k_t^{\alpha} \tag{7}$$

を導出せよ．

2. 平面 (k_t, k_{t+1}) 上に，(7) 式の曲線と 45 度線を図示し，1 人あたり資本 k_t の移行過程を説明せよ．

3. 長期均衡での 1 人あたり資本 k^* を，s, A, n, α を用いて表せ．

4. t 時点の 1 人あたり消費を，

$$c_t = \frac{C_t}{L_t} \tag{8}$$

とおく．(1), (2), (3), (8) 式から，

$$c_t = (1-s)Ak_t^{\alpha} \tag{9}$$

となることを示せ．

5. 長期均衡での 1 人あたり消費 c^* が最大となる投資率 s^* を求めよ．

II. 次のマクロモデルに関する各問いに答えよ．導出過程を明記すること．

$$\text{財市場均衡式} \quad Y_t = C_t + I_t + G_t \tag{1}$$

$$\text{投資関数} \quad I_t = s(1-\tau)Y_t \tag{2}$$

$$\text{生産関数} \quad Y_t = AK_t^{\alpha}G_t^{1-\alpha} \tag{3}$$

$$\text{政府予算制約式} \quad \tau Y_t = G_t \tag{4}$$

$$\text{資本蓄積方程式} \quad K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t \tag{5}$$

下付きの t は時点を表す．Y は国民所得，C は消費，I は投資，G は政府支出，K は資本である．$0 < \tau < 1$ は所得税率 (定数)，$0 < s < 1$ は投資率 (定数)，$0 < \alpha < 1$ は資本分配率 (定数)，$A > 0$ は TFP(定数)，$0 < \delta < 1$ は資本減耗率 (定数) である．

1. (1), (2), (4) 式から，消費関数

$$C_t = (1-s)(1-\tau)Y_t \tag{6}$$

が得られることを示せ.

2. (3), (4) 式から， t 時点の資本と国民所得の間に,

$$Y_t = \left(A\tau^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} K_t \tag{7}$$

の関係が成立することを示せ.

3. t 時点における資本成長率を,

$$g_t = \frac{K_{t+1} - K_t}{K_t}$$

とおく．(2), (5), (7) 式を用いて，成長率 g_t を s, τ, A, δ を用いて表せ.

4. 0 時点における資本 K_0 が与えられたとき，0 時点の消費 C_0 を最大にする税率 τ を求めよ.

5. 3 の成長率 g_t を最大にする税率 τ を求めよ.

I. 1.

$$K_{t+1} = sAK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}$$

の両辺を $L_{t+1} = nL_t$ で割ると，

$$k_{t+1} = \frac{sA}{n}k_t^{\alpha}$$

2. 略
3.

$$k^* = \left(\frac{sA}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

4. $C_t = (1-s)AK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}$ より，$c_t = C_t/L_t = (1-s)Ak_t^{\alpha}$.
5. 3 より，

$$c^* = (1-s)A\left(\frac{sA}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

c^* が最大になるのは，$s^* = \alpha$ のとき．

II.

1. $C_t = Y_t - I_t - G_t = (1-\tau)Y_t - s(1-\tau)Y_t = (1-s)(1-\tau)Y_t$.

2. $Y_t = AK_t^{\alpha}G_t^{1-\alpha} = AK_t^{\alpha}(\tau Y_t)^{1-\alpha}$ より，$Y_t^{\alpha} = A\tau^{1-\alpha}K_t^{\alpha}$．したがって，$Y_t = (A\tau^{1-\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}K_t$.

3. (5), (2), (7) 式より，

$$\begin{aligned} g_t &= \frac{I_t - \delta K_t}{K_t} \\ &= \frac{s(1-\tau)(A\tau^{1-\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}K_t - \delta K_t}{K_t} \\ &= s(1-\tau)(A\tau^{1-\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} - \delta \end{aligned}$$

4. (6), (7) 式より，0 時点の消費は，

$$C_0 = (1-s)(1-\tau)(A\tau^{1-\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}K_0$$

C_0 が最大になるのは，$\tau^* = 1-\alpha$ のとき．

5. 3 の g_t が最大になるのは，$\tau^* = 1-\alpha$ のとき．