Ramsey model (6) General solution

次の最適化問題を考える．

$$U_0 = \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \tag{1}$$

subject to

$$\text{資源制約} \quad y_t = c_t + i_t \tag{2}$$

$$\text{マクロ生産関数} \quad y_t = f(k_t) \tag{3}$$

$$\text{資本蓄積} \quad k_{t+1} = i_t + (1-\delta)k_t \tag{4}$$

下付きの t は時点を表す．c は消費，y は GDP，i は投資，k は資本である．$0 < \beta < 1$ は割引要素 (定数)，$0 \leq \delta \leq 1$ は資本減耗率 (定数) である．

1. 式を整理すると，最適化問題を次のように定式化できることを示せ.

$$U_0 = \max_{c_t,\, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \quad \text{subject to} \quad (1-\delta)k_t + f(k_t) = c_t + k_{t+1} \tag{5}$$

ラグランジュ関数を，

$$L_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ U(c_t) + \mu_t \left[(1-\delta)k_t + f(k_t) - c_t - k_{t+1} \right] \right\}$$

とおく．$\mu_t > 0$ はラグランジュ乗数である．

2. 最適化の 1 階の条件

$$U'(c_t) - \mu_t = 0 \tag{6}$$

$$-\mu_t + \beta\mu_{t+1}[1 - \delta + f'(k_{t+1})] = 0 \tag{7}$$

を導出せよ．なお，横断性条件 (transversality condition) は，

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t \mu_t k_{t+1} = 0 \tag{8}$$

である．

3. (6), (7) 式より，次のオイラー方程式を導出せよ．

$$\frac{U'(c_t)}{U'(c_{t+1})} = \beta[1 - \delta + f'(k_{t+1})] \tag{9}$$

初期の資本 k_0 が与えられたとき，消費と資本の時間経路 $\{c_t\}, \{k_{t+1}\}$ は次の連立差分方程式で求められる．

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + f(k_t) - c_t \tag{10}$$

$$\frac{U'(c_t)}{U'(c_{t+1})} = \beta[1 - \delta + f'(k_{t+1})] \tag{11}$$

長期均衡（定常経路）は，(10), (11) 式で，$k_t = k_{t+1} = k^*, c_t = c_{t+1} = c^*$ とおくことで得られる．また，時間選好率を $\theta > 0$ とすると，

$$\beta = \frac{1}{1+\theta} \tag{12}$$

が成り立つ．

4. 長期均衡 (k^*, c^*) は，次の連立方程式の解であることを示せ．

$$c = f(k) - \delta k \tag{13}$$

$$f'(k) = \theta + \delta \tag{14}$$

5. 平面 (k, c) 上に，(13), (14) 式で表されるグラフを描き，長期均衡 (k^*, c^*) を図示せよ．なお，(13) 式の消費 c を最大にする資本を $\hat{k}$ とする．

6. 長期均衡 (k^*, c^*) は，(8) 式の横断性条件を満たすことを示せ．

7. (10) 式より，

$$k_{t+1} - k_t = f(k_t) - \delta k_t - c_t \tag{15}$$

が成り立つ．平面 (k, c) 上に，$k_{t+1} > k_t$ が成立する領域 (k_t, c_t) を図示せよ．

8. $c_{t+1} \fallingdotseq c_t$ とする．c_t の近傍で，$U'(c_{t+1})$ を 1 次近似すると，

$$U'(c_{t+1}) = U'(c_t) + U''(c_t)(c_{t+1} - c_t) \tag{16}$$

を得る．(11), (16) 式を用いて，次の式を導出せよ．

$$c_{t+1} - c_t = -\frac{U'(c_t)}{U''(c_t)} \times \frac{f'(k_{t+1}) - (\theta + \delta)}{1 - \delta + f'(k_{t+1})} \tag{17}$$

9. (17) 式を用いて，平面 (k, c) 上に，$c_{t+1} > c_t$ が成立する領域 (k_{t+1}, c_t) を図示せよ．

10. 長期均衡 (k^*, c^*) は，鞍点安定 (saddle-path stable) であることを確かめよ．