Ramsey model (5) R&D

次の最適化問題を考える．

$$U_0 = \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log c_t \tag{1}$$

subject to

$$\text{資源制約} \quad y_t = c_t + z_t + i_t \tag{2}$$
$$\text{マクロ生産関数} \quad y_t = f(k_t, h_t) \tag{3}$$
$$\text{有効労働} \quad h_t = A_t l_t \tag{4}$$
$$\text{労働人口} \quad l_t = 1 \tag{5}$$
$$\text{資本蓄積} \quad k_{t+1} = i_t \tag{6}$$
$$\text{労働増大的技術} \quad A_{t+1} = \phi z_t \tag{7}$$

下付きの t は時点を表す．c は消費，y は GDP，z は研究開発費，i は投資，k は資本，h は有効労働，l は労働人口，A は労働増大的技術を表す．$0 < \beta < 1$ は割引要素 (定数)，$\phi > 0$ は研究開発の生産性 (定数) である．

1. 式を整理すると，最適化問題を次のように定式化できることを示せ．

$$U_0 = \max_{c_t,\, k_{t+1},\, A_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log c_t \quad \text{subject to} \quad f(k_t, A_t) = c_t + \frac{1}{\phi} A_{t+1} + k_{t+1} \tag{8}$$

ラグランジュ関数を，

$$L_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \log c_t + \mu_t \left[f(k_t, A_t) - c_t - \frac{1}{\phi} A_{t+1} - k_{t+1} \right] \right\}$$

とおく．$\mu_t > 0$ はラグランジュ乗数である．

2. 最適化の 1 階の条件

$$\frac{1}{c_t} - \mu_t = 0 \tag{9}$$
$$-\mu_t + \beta \mu_{t+1} \frac{\partial y_{t+1}}{\partial k_{t+1}} = 0 \tag{10}$$
$$-\frac{1}{\phi} \mu_t + \beta \mu_{t+1} \frac{\partial y_{t+1}}{\partial A_{t+1}} = 0 \tag{11}$$

を導出せよ．なお，横断性条件 (transversality condition) は，

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t \mu_t k_{t+1} = 0 \tag{12}$$
$$\lim_{t \to \infty} \beta^t \mu_t A_{t+1} = 0 \tag{13}$$

である．

生産関数を次のように特定化する．

$$y_t = f(k_t, A_t) = B k_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha} \tag{14}$$

ただし，$0 < \alpha < 1$，$B > 0$ は定数である．

3. (14) 式の技術のもとで，次の関係式が成立することを示せ．

$$\frac{\partial y_t}{\partial k_t} = \alpha \frac{y_t}{k_t} \tag{15}$$

$$\frac{\partial y_t}{\partial A_t} = (1-\alpha) \frac{y_t}{A_t} \tag{16}$$

4. (10), (15) 式および，(11), (16), (7) 式を用いて，次の関係式を導出せよ．

$$\mu_t k_{t+1} = \beta \alpha \mu_{t+1} y_{t+1} \tag{17}$$

$$\mu_t z_t = \beta(1-\alpha)\mu_{t+1} y_{t+1} \tag{18}$$

5. (8), (9), (17), (18) 式を用いて，次の関係式を導出せよ．

$$\mu_t y_t = 1 + \beta \mu_{t+1} y_{t+1} \tag{19}$$

6. 5 の，$\mu_t y_t$ は効用で測った t 時点の資源の価値を表す．これを x_t とおく．

$$x_t = \mu_t y_{t+1} \tag{20}$$

平面 (x_t, x_{t+1}) 上に，(20) 式と 45 度線を図示せよ．定常値は，

$$x^* = \frac{1}{1-\beta} \tag{21}$$

であり，均衡は広域的に不安定であることを示せ．

7. 6 の結果から，すべての時点 t において，

$$x_t = x^*$$

が成り立つ．このとき，(12), (13) 式の横断性条件が満たされることを示せ．

8. t 時点の投資，研究開発費，消費がそれぞれ，次式で与えられることを示せ．

$$i_t = \beta \alpha y_t \tag{22}$$

$$z_t = \beta(1-\alpha) y_t \tag{23}$$

$$c_t = (1-\beta) y_t \tag{24}$$

9. (14), (22), (23) 式より，経済成長率が次式で与えられることを示せ．

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \beta \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} \phi^{1-\alpha} B \tag{25}$$

1. 略
2. 略
3. 略
4.

$$\mu_t = \beta\mu_{t+1}\frac{\partial y_{t+1}}{\partial k_{t+1}} = \beta\mu_{t+1} \times \alpha\frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} \Rightarrow \mu_t k_{t+1} = \beta\alpha\mu_{t+1}y_{t+1}$$
$$\frac{1}{\phi}\mu_t = \beta\mu_{t+1}\frac{\partial y_{t+1}}{\partial A_{t+1}} = \beta\mu_{t+1} \times (1-\alpha)\frac{y_{t+1}}{A_{t+1}} \Rightarrow \mu_t z_t = \beta(1-\alpha)\mu_{t+1}y_{t+1}$$

5.
$$y_t = \frac{1}{\mu_t} + z_t + k_{t+1} \Rightarrow \mu_t y_t = 1 + \mu_t z_t + \mu_t k_{t+1} = 1 + \beta\mu_{t+1}y_{t+1}$$

6. 図は略．$x_t = x_{t+1} = x^*$ とおくと，
$$x^* = \frac{1}{1-\beta}$$

7. 横断性条件は，

$$\lim_{t\to\infty}\beta^t\mu_t k_{t+1} = \lim_{t\to\infty}\beta^t x^* = 0$$
$$\lim_{t\to\infty}\beta^t\mu_t A_{t+1} = \lim_{t\to\infty}\beta^t \times \phi\frac{1-\alpha}{\alpha}x^* = 0$$

8.

$$\mu_t k_{t+1} = \frac{\beta\alpha}{1-\beta}$$
$$\mu_t z_t = \frac{\beta(1-\alpha)}{1-\beta}$$

より，

$$\frac{k_{t+1}}{y_t} = \frac{\mu_t k_{t+1}}{\mu_t y_t} = \beta\alpha \Rightarrow i_t = \beta\alpha y_t$$
$$\frac{z_t}{y_t} = \frac{\mu_t z_t}{\mu_t y_t} = \beta(1-\alpha)y_t$$
$$c_t = y_t - z_t - i_t = y_t - \beta(1-\alpha)y_t - \beta\alpha y_t = (1-\beta)y_t$$

9.
$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{Bk_{t+1}^{\alpha}A_{t+1}^{1-\alpha}}{y_t} = \frac{B\left(\beta\alpha y_t\right)^{\alpha}\left[\phi\beta(1-\alpha)y_t\right]^{1-\alpha}}{y_t} = \beta\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}\phi^{1-\alpha}B$$