Ramsey model (4) Human capital

次の最適化問題を考える．

$$U_0 = \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log c_t \tag{1}$$

subject to

$$\text{資源制約} \quad y_t = c_t + e_t + i_t \tag{2}$$

$$\text{物的資本蓄積} \quad k_{t+1} = i_t \tag{3}$$

$$\text{人的資本蓄積} \quad h_{t+1} = e_t \tag{4}$$

$$\text{マクロ生産関数} \quad y_t = f(k_t, h_t) \tag{5}$$

下付きの t は時点を表す．c は消費，y は GDP，e は教育支出，i は投資，k は物的資本，h は人的資本である．$0 < \beta < 1$ は割引要素を表す定数である．

1. 式を整理すると，最適化問題を次のように定式化できることを示せ．

$$U_0 = \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log c_t \quad \text{subject to} \quad f(k_t, h_t) = c_t + h_{t+1} + k_{t+1} \tag{6}$$

ラグランジュ関数を，

$$L_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \log c_t + \mu_t [f(k_t, h_t) - c_t - h_{t+1} - k_{t+1}] \right\}$$

とおく．$\mu_t > 0$ はラグランジュ乗数である．

2. 最適化の 1 階の条件

$$\frac{1}{c_t} - \mu_t = 0 \tag{7}$$

$$-\mu_t + \beta \mu_{t+1} \frac{\partial y_{t+1}}{\partial h_{t+1}} = 0 \tag{8}$$

$$-\mu_t + \beta \mu_{t+1} \frac{\partial y_{t+1}}{\partial k_{t+1}} = 0 \tag{9}$$

を導出せよ．なお，横断性条件 (transversality condition) は，

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t \mu_t h_{t+1} = 0 \tag{10}$$

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t \mu_t k_{t+1} = 0 \tag{11}$$

である．

3. (8), (9) 式を用いて，物的資本投資と人的資本投資の最適配分ルール

$$\frac{\partial y_{t+1}}{\partial h_{t+1}} = \frac{\partial y_{t+1}}{\partial k_{t+1}} \tag{12}$$

を導出せよ．

生産関数を次のように特定化する．

$$y_t = f(k_t, h_t) = A k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} \tag{13}$$

ただし，$0 < \alpha < 1$，$A > 0$ は定数である．

4. (12), (13) 式を用いて，

$$h_{t+1} = \frac{1-\alpha}{\alpha} k_{t+1} \tag{14}$$

を導出せよ．

5. (13) 式の技術のもとで，物的資本の限界生産力と平均生産力の間に，

$$\frac{\partial y_t}{\partial k_t} = \alpha \frac{y_t}{k_t} \tag{15}$$

の関係が成立することを示せ．

6. (6), (7), (14) 式を用いて，次の方程式を導出せよ．

$$\mu_t y_t = 1 + \frac{1}{\alpha} \mu_t k_{t+1} \tag{16}$$

7. (9), (15) 式を用いて，次の方程式を導出せよ．

$$\mu_t k_{t+1} = \alpha\beta \mu_{t+1} y_{t+1} \tag{17}$$

8. $\mu_t k_{t+1}$ は効用で測った t 時点の物的資本の価値を表す．これを x_t とおく．

$$x_t = \mu_t k_{t+1} \tag{18}$$

(16), (17) 式を用いて，x_t の漸化式

$$x_{t+1} = \frac{1}{\beta} x_t - \alpha \tag{19}$$

を導出せよ．

9. 平面 (x_t, x_{t+1}) 上に，(19) 式と 45 度線を図示せよ．定常値は，

$$x^* = \frac{\beta\alpha}{1-\beta} \tag{20}$$

であり，均衡は広域的に不安定であることを示せ．

10. 9 の結果から，すべての時点 t において，

$$x_t = x^*$$

が成り立つ．このとき，(11), (10) 式の横断性条件が満たされることを示せ．

11. t 時点の物的資本投資，教育支出，消費がそれぞれ，次式で与えられることを示せ．

$$i_t = \beta\alpha y_t \tag{21}$$

$$e_t = \beta(1-\alpha) y_t \tag{22}$$

$$c_t = (1-\beta) y_t \tag{23}$$

12. (13), (21), (22) 式より，経済成長率が次式で与えられることを示せ．

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \beta\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} A \tag{24}$$

1. 略

2. 略

3.

$$\frac{\partial y_{t+1}}{\partial h_{t+1}} = \frac{\mu_t}{\beta\mu_{t+1}} = \frac{\partial y_{t+1}}{\partial k_{t+1}}$$

4.

$$\frac{\partial y_{t+1}}{\partial h_{t+1}} = (1-\alpha)\frac{y_{t+1}}{h_{t+1}}$$
$$\frac{\partial y_{t+1}}{\partial k_{t+1}} = \alpha\frac{y_{t+1}}{k_{t+1}}$$

より，

$$h_{t+1} = \frac{1-\alpha}{\alpha}k_{t+1}$$

5. 略

6.

$$y_t = \frac{1}{\mu_t} + \frac{1-\alpha}{\alpha}k_{t+1} + k_{t+1} \Rightarrow \mu_t y_t = 1 + \frac{1}{\alpha}\mu_t k_{t+1}$$

7.

$$\mu_t = \beta\mu_{t+1}\frac{\partial y_{t+1}}{\partial k_{t+1}} \Rightarrow \mu_t k_{t+1} = \beta\alpha\mu_{t+1}y_{t+1}$$

8.

$$x_t = \mu_t k_{t+1} = \beta\alpha\mu_{t+1}y_{t+1} = \beta\alpha\left(1 + \frac{1}{\alpha}\mu_t k_{t+1}\right) = \beta\alpha + \beta x_{t+1}$$

9. 図は略．$x_t = x_{t+1} = x^*$ とおくと，

$$x^* = \frac{\beta\alpha}{1-\beta}$$

10. 横断性条件は，

$$\lim_{t\to\infty}\beta^t\mu_t k_{t+1} = \lim_{t\to\infty}\beta^t x^* = 0$$
$$\lim_{t\to\infty}\beta^t\mu_t h_{t+1} = \lim_{t\to\infty}\beta^t \times \frac{1-\alpha}{\alpha}x^* = 0$$

11.

$$\mu_t y_t = \frac{1}{1-\beta}$$

より，

$$\frac{k_{t+1}}{y_t} = \frac{\mu_t k_{t+1}}{\mu_t y_t} = \beta\alpha \Rightarrow i_t = \beta\alpha y_t$$
$$e_t = h_{t+1} = \frac{1-\alpha}{\alpha}k_{t+1} = \beta(1-\alpha)y_t$$
$$c_t = y_t - h_{t+1} - k_{t+1} = y_t - \beta(1-\alpha)y_t - \beta\alpha y_t = (1-\beta)y_t$$

12.

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{Ak_{t+1}^{\alpha}h_{t+1}^{1-\alpha}}{y_t} = \frac{A\left(\beta\alpha y_t\right)^{\alpha}\left[\beta(1-\alpha)y_t\right]^{1-\alpha}}{y_t} = \beta\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}A$$