

## Ramsey model (2) Public investment

次の最適化問題を考える.

$$U_0 = \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log c_t \quad (1)$$

subject to

$$\text{資源制約} \quad y_t = c_t + i_t^P + i_t^G \quad (2)$$

$$\text{民間資本蓄積} \quad k_{t+1} = i_t^P \quad (3)$$

$$\text{公的資本蓄積} \quad g_{t+1} = i_t^G \quad (4)$$

$$\text{マクロ生産関数} \quad y_t = f(k_t, g_t) \quad (5)$$

下付きの  $t$  は時点を表す.  $c$  は消費,  $y$  は GDP,  $i^P$  は民間投資,  $i^G$  は公共投資,  $k$  は民間資本,  $g$  は公共資本である.  $0 < \beta < 1$  は割引要素を表す定数である.

1.  $t$  時点の資源制約式が,

$$f(k_t, g_t) = c_t + g_{t+1} + k_{t+1} \quad (6)$$

となることを示せ.

ラグランジュ関数を,

$$L_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{ \log c_t + \mu_t [f(k_t, g_t) - c_t - g_{t+1} - k_{t+1}] \}$$

とおく.  $\mu_t > 0$  はラグランジュ乗数である.

2. 最適化の1階の条件

$$\frac{1}{c_t} - \mu_t = 0 \quad (7)$$

$$-\mu_t + \beta \mu_{t+1} \frac{\partial y_{t+1}}{\partial g_{t+1}} = 0 \quad (8)$$

$$-\mu_t + \beta \mu_{t+1} \frac{\partial y_{t+1}}{\partial k_{t+1}} = 0 \quad (9)$$

を導出せよ. なお, 横断性条件 (transversality condition) は,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \mu_t g_{t+1} = 0 \quad (10)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \mu_t k_{t+1} = 0 \quad (11)$$

である.

3. (8), (9) 式を用いて, 民間投資と公共投資の最適配分ルール

$$\frac{\partial y_{t+1}}{\partial g_{t+1}} = \frac{\partial y_{t+1}}{\partial k_{t+1}} \quad (12)$$

を導出せよ.

生産関数を次のように特定化する.

$$y_t = f(k_t, g_t) = A k_t^\alpha g_t^{1-\alpha} \quad (13)$$

ただし,  $0 < \alpha < 1$ ,  $A > 0$  は定数である.

4. (12), (13) 式を用いて,

$$g_{t+1} = \frac{1-\alpha}{\alpha} k_{t+1} \quad (14)$$

を導出せよ.

5. (13) 式の技術のもとで, 民間資本の限界生産力と平均生産力の間に,

$$\frac{\partial y_t}{\partial k_t} = \alpha \frac{y_t}{k_t} \quad (15)$$

の関係が成立することを示せ.

6. (6), (7), (14) 式を用いて, 次の方程式を導出せよ.

$$\mu_t y_t = 1 + \frac{1}{\alpha} \mu_t k_{t+1} \quad (16)$$

7. (9), (15) 式を用いて, 次の方程式を導出せよ.

$$\mu_t k_{t+1} = \alpha \beta \mu_{t+1} y_{t+1} \quad (17)$$

8.  $\mu_t k_{t+1}$  は効用で測った  $t$  時点の民間資本の価値を表す. これを  $x_t$  とおく.

$$x_t = \mu_t k_{t+1} \quad (18)$$

(16), (17) 式を用いて,  $x_t$  の漸化式

$$x_{t+1} = \frac{1}{\beta} x_t - \alpha \quad (19)$$

を導出せよ.

9. 平面  $(x_t, x_{t+1})$  上に, (19) 式と 45 度線を図示せよ. 定常値は,

$$x^* = \frac{\beta\alpha}{1-\beta} \quad (20)$$

であり, 均衡は広域的に不安定であることを示せ.

10. 9 の結果から, すべての時点  $t$  において,

$$x_t = x^*$$

が成り立つ. このとき, (11), (10) 式の横断性条件が満たされることを示せ.

11.  $t$  時点の民間部門と公共部門の投資率は,

$$\frac{k_{t+1}}{y_t} = \beta\alpha \quad (21)$$

$$\frac{g_{t+1}}{y_t} = \beta(1-\alpha) \quad (22)$$

であることを示せ.

12. (13), (21), (22) 式より, 経済成長率が次式で与えられることを示せ.

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \beta\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha} A \quad (23)$$

13.  $t$  時点の消費関数が次式で与えられることを示せ.

$$c_t = (1-\beta)y_t \quad (24)$$

1. 略

2. 略

3.

$$\frac{\partial y_{t+1}}{\partial g_{t+1}} = \frac{\mu_t}{\beta \mu_{t+1}} = \frac{\partial y_{t+1}}{\partial k_{t+1}}$$

4.

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_{t+1}}{\partial g_{t+1}} &= (1 - \alpha) \frac{y_{t+1}}{g_{t+1}} \\ \frac{\partial y_{t+1}}{\partial k_{t+1}} &= \alpha \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}}\end{aligned}$$

より,

$$g_{t+1} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} k_{t+1}$$

5. 略

6.

$$y_t = \frac{1}{\mu_t} + \frac{1 - \alpha}{\alpha} k_{t+1} + k_{t+1} \Rightarrow \mu_t y_t = 1 + \frac{1}{\alpha} \mu_t k_{t+1}$$

7.

$$\mu_t = \beta \mu_{t+1} \frac{\partial y_{t+1}}{\partial k_{t+1}} \Rightarrow \mu_t k_{t+1} = \beta \alpha \mu_{t+1} y_{t+1}$$

8.

$$x_t = \mu_t k_{t+1} = \beta \alpha \mu_{t+1} y_{t+1} = \beta \alpha \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \mu_t k_{t+1} \right) = \beta \alpha + \beta x_{t+1}$$

9. 図は略.  $x_t = x_{t+1} = x^*$  とおくと,

$$x^* = \frac{\beta \alpha}{1 - \beta}$$

10. 横断性条件は,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \mu_t k_{t+1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t x^* = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \mu_t g_{t+1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \times \frac{1 - \alpha}{\alpha} x^* = 0\end{aligned}$$

11.

$$\mu_t y_t = \frac{1}{1 - \beta}$$

より,

$$\frac{k_{t+1}}{y_t} = \frac{\mu_t k_{t+1}}{\mu_t y_t} = \beta \alpha$$

12.

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{A k_{t+1}^\alpha g_{t+1}^{1-\alpha}}{y_t} = \frac{A (\beta \alpha y_t)^\alpha [\beta (1 - \alpha) y_t]^{1-\alpha}}{y_t} = \beta \alpha^\alpha (1 - \alpha)^{1-\alpha} A$$

13.

$$c_t = y_t - g_{t+1} - k_{t+1} = y_t - \beta (1 - \alpha) y_t - \beta \alpha y_t = (1 - \beta) y_t$$