Ramsey model (1)

次の最適化問題を考える.

$$U_0 = \max_{c_t,\, i_t,\, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log c_t \tag{1}$$

subject to

$$\text{資源制約式} \quad y_t = c_t + i_t \tag{2}$$

$$\text{資本蓄積方程式} \quad k_{t+1} = i_t \tag{3}$$

$$\text{マクロ生産関数} \quad y_t = f(k_t) \tag{4}$$

下付きの t は時点を表す. c は消費, y は GDP, i は投資, k は資本である. $0 < \beta < 1$ は割引要素を表す定数である.

1. (2), (3), (4) 式より, t 時点の資源制約式が,

$$f(k_t) = c_t + k_{t+1} \tag{5}$$

となることを示せ.

ラグランジュ関数を,

$$L_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \log c_t + \mu_t [f(k_t) - c_t - k_{t+1}] \right\}$$

とおく. $\mu_t > 0$ は t 時点の current value の乗数を表す[1].

2. 最適化の 1 階の条件

$$\frac{1}{c_t} - \mu_t = 0 \tag{6}$$

$$-\mu_t + \beta \mu_{t+1} f'(k_{t+1}) = 0 \tag{7}$$

を導出せよ. なお, 横断性条件 (transversality condition) は,

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t \mu_t k_{t+1} = 0 \tag{8}$$

である.

生産関数を次のように特定化する.

$$y_t = f(k_t) = A k_t^{\alpha} \tag{9}$$

ただし, $0 < \alpha < 1$, $A > 0$ は定数である.

3. (9) 式の技術のもとで, 限界生産力と平均生産力の間に,

$$f'(k_t) = \alpha \frac{f(k_t)}{k_t} \tag{10}$$

の関係が成立することを示せ.

[1] テキストでは, present value の乗数 $\lambda_t = \beta^t \mu_t$ を用いている.

4. (5), (6), (7), (10) 式を用いて，次の 2 つの方程式を導出せよ.

$$\mu_t k_{t+1} = \alpha\beta\mu_{t+1}y_{t+1} \tag{11}$$

$$\mu_t y_t = 1 + \mu_t k_{t+1} \tag{12}$$

5. $\mu_t k_{t+1}$ は効用で測った t 時点の資本価値（投資価値）を表す．これを x_t とおく.

$$x_t = \mu_t k_{t+1} \tag{13}$$

(11), (12) 式を用いて，x_t の漸化式

$$x_{t+1} = \frac{1}{\alpha\beta}x_t - 1 \tag{14}$$

を導出せよ.

6. 平面 (x_t, x_{t+1}) 上に，(14) 式と 45 度線を図示せよ．定常値は,

$$x^* = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \tag{15}$$

であり，均衡は広域的に不安定であることを示せ.

7. 6 の結果から，すべての時点 t において,

$$x_t = x^*$$

が成り立つ．このとき，(8) 式の横断性条件が満たされることを示せ.

8. t 時点の投資率は,

$$\frac{k_{t+1}}{y_t} = \alpha\beta \tag{16}$$

であることを示せ.

9. (9), (16) 式より,

$$k_{t+1} = \alpha\beta A k_t^\alpha \tag{17}$$

を得る．平面 (k_t, k_{t+1}) 上に，(17) 式と 45 度線を図示せよ．また，初期資本 k_0 が与えられたときの k_1, k_2, k_3 を図示せよ.

10. 長期均衡における資本は,

$$k^* = (\alpha\beta A)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{18}$$

であることを示せ.

11. t 時点の消費関数は,

$$c_t = (1-\alpha\beta)y_t \tag{19}$$

であることを示せ.

12. 横軸を時点 t とし，資本 $\{k_t\}$，GDP$\{y_t\}$，消費 $\{c_t\}$，乗数 $\{\mu_t\}$ の時間経路を図示せよ.

1. (3), (4) 式を (2) 式に代入すると，

$$f(k_t) = c_t + k_{t+1}$$

2.

$$\frac{\partial L_0}{\partial c_t} = 0 \Rightarrow \frac{1}{c_t} - \mu_t = 0$$
$$\frac{\partial L_0}{\partial k_{t+1}} = 0 \Rightarrow -\mu_t + \beta \mu_{t+1} f'(k_{t+1}) = 0$$

3.

$$f'(k_t) = \alpha A k_t^{\alpha-1} = \alpha \frac{A k_t^{\alpha}}{k_t} = \alpha \frac{f(k_t)}{k_t}$$

4. (10) 式を (7) 式に代入する．

$$\mu_t = \beta \mu_{t+1} \times \alpha \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} \Rightarrow \mu_t k_{t+1} = \alpha\beta \mu_{t+1} y_{t+1}$$

(6) 式を (5) 式に代入する．

$$y_t = \frac{1}{\mu_t} + k_{t+1} \Rightarrow \mu_t y_t = 1 + \mu_t k_{t+1}$$

5.

$$\mu_t k_{t+1} = \alpha\beta(1 + \mu_{t+1} k_{t+2}) \Rightarrow x_t = \alpha\beta(1 + x_{t+1})$$

6. 図は省略．定常値は，$x_{t+1} = x_t = x^*$ より，

$$x^* = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}$$

7.

$$\beta^t \mu_t k_{t+1} = \beta^t \times \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \to 0 \quad \text{when } t \to \infty$$

8.

$$\mu_t k_{t+1} = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}$$
$$\mu_t y_t = \frac{1}{1-\alpha\beta}$$

辺々割ると，

$$\frac{k_{t+1}}{y_t} = \alpha\beta$$

9. 略．

10. $k_{t+1} = k_t = k^*$ とおく．

11.

$$c_t = y_t - k_{t+1} = (1-\alpha\beta) y_t$$

12. $k_0 < k^*$ と仮定する．

$\{k_t\}$　単調増加，k^* に収束

$\{y_t\}$　単調増加，$f(k^*)$ に収束

$\{c_t\}$　単調増加，$c^* = (1-\alpha\beta) f(k^*)$ に収束

$\{\mu_t\}$　単調減少，$1/c^*$ に収束