異時点間の最適配分－Ramsey model

「行動経済学」の補足　14 December, 2018

指数割引 (exponential discounting) の代表的モデルであるラムゼー・モデルを紹介する[1]．1 節では離散時間モデルを，2 節では連続時間モデルを説明する．離散時間では数列 $\{c_t\}$ を用いる．連続時間では関数 $c(t)$ を用いる．1 節と 2 節を比較すると，Lagrangian による解法と，Hamiltonian による解法は同じであることが分かるだろう．

1　離散時間モデル

効用関数

$$U_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln c_t \tag{1}$$

時点 t における予算制約式

$$w_t + rk_t = c_t + i_t \tag{2}$$

資本蓄積方程式

$$k_{t+1} = k_t + i_t \tag{3}$$

ただし，時点 0 における資産 k_0 は所与．

k_t 資産，c_t 消費，i_t 投資，w_t 賃金，r 利子率（一定），$0 < \delta < 1$ 割引因子 (一定)

(2), (3) 式で，投資 i_t を消去する．

$$w_t + (1+r)k_t = c_t + k_{t+1} \tag{4}$$

時点 0 での最適化問題

$$\max\, U_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln c_t \quad \text{subject to} \quad w_t + (1+r)k_t = c_t + k_{t+1} \quad (t = 0, 1, 2, ...)$$

Lagrangian

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \delta^t \ln c_t + \lambda_t [w_t + (1+r)k_t - c_t - k_{t+1}] \right\}$$

λ_t 時点 t の予算制約 (4) 式のラグランジュ乗数 $(t = 0, 1, 2, ...)$.

最適化条件

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \delta^t \cdot \frac{1}{c_t} - \lambda_t = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} = -\lambda_t + (1+r)\lambda_{t+1} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = w_t + (1+r)k_t - c_t - k_{t+1} = 0$$

[1] Ramsey, F.P. (1928) A mathematical theory of saving, *Economic Journal* 38, 543-559.

(5) 式は，消費に関する最適条件．消費の限界便益が δ^t/c_t，投資減にともなう限界費用が λ_t である．

(6) 式は，投資に関する最適条件．投資を増やすと，現在消費が減る．効用が λ_t だけ低下する．他方，投資を 1 単位増やすと，次の期の所得が $(1+r)$ だけ増えるので，次期の効用が $(1+r)\lambda_{t+1}$ だけ増える．

(5), (6) 式は，限界便益と限界費用が一致する水準で，消費と投資を決めることを意味している．

横断性条件 (Transversality condition)

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t k_{t+1} = 0 \tag{7}$$

資産そのものは効用を生じない．(7) 式は，遠い将来，資産の価値がゼロになることを意味している．

以下，(4), (5), (6), (7) 式を用いて，時点 0 での最適消費 c_0^* を求める．

[ラグランジュ乗数 λ_t]

(6) 式より，

$$\lambda_{t+1} = \frac{\lambda_t}{1+r}$$

初項 λ_0，公比 $1/(1+r)$ の等比数列なので，

$$\lambda_t = \frac{\lambda_0}{(1+r)^t} \tag{8}$$

[将来消費 c_t]

(5) 式から，$\lambda_t = \delta^t/c_t$，$\lambda_0 = 1/c_0$．これらを (8) 式に代入すると，

$$c_t = c_0[\delta(1+r)]^t \tag{9}$$

が得られる．

補足　割引因子 δ と時間選好率 ρ の間には，

$$\delta = \frac{1}{1+\rho}$$

の関係がある．(9) 式に代入すると，

$$c_t = c_0 \left(\frac{1+r}{1+\rho}\right)^t \tag{10}$$

が成り立つ．(10) 式から，利子率 r と時間選好率 ρ の大小関係を用いて，消費経路を分類できる[2]．

(i) $r > \rho$ のとき，公比 $\frac{1+r}{1+\rho} > 1$．消費は時間を通じて増加（無限大に発散）．

(ii) $r = \rho$ のとき，公比 $= 1$．消費は時間を通じて一定．

(iii) $r < \rho$ のとき，公比 < 1．消費は時間を通じて減少（ゼロに収束）．

[将来資産 k_t]

(9) 式を (4) 式に代入する．

$$k_{t+1} = w_t + (1+r)k_t - c_0[\delta(1+r)]^t$$

両辺を $(1+r)^t$ で割る．

$$\frac{k_{t+1}}{(1+r)^t} = \frac{w_t}{(1+r)^t} + \frac{k_t}{(1+r)^{t-1}} - c_0\delta^t$$

[2] Findley and Caliendro (2015) は，$r = 0$ と仮定しているので，(iii) のケースに分類される．

ここで，

$$x_t = \frac{k_t}{(1+r)^{t-1}} \tag{11}$$

とおくと，

$$x_{t+1} - x_t = \frac{w_t}{(1+r)^t} - c_0\delta^t \tag{12}$$

が得られる．

(12) 式の $(x_{t+1} - x_t)$ を，数列 $\{x_t\}$ の階差数列という．次のように考えると，階差数列から，$\{x_t\}$ が求められる．

(12) 式で，$t = 0, 1, 2, ..., T$ を代入した式を並べる．

$$\begin{aligned}
x_1 - x_0 &= w_0 - c_0 \\
x_2 - x_1 &= \frac{w_1}{1+r} - c_0\delta \\
x_3 - x_2 &= \frac{w_2}{(1+r)^2} - c_0\delta^2 \\
&\cdots \\
x_{T+1} - x_T &= \frac{w_T}{(1+r)^T} - c_0\delta^T
\end{aligned}$$

辺々加えると，

$$x_{T+1} - x_0 = \sum_{t=0}^{T} \left[\frac{w_t}{(1+r)^t} - c_0\delta^t \right]$$

が成り立つ．

さらに，初項 1，公比 δ，項数 $(T+1)$ の等比数列の和の公式より，

$$\sum_{t=0}^{T} \delta^t = \frac{1-\delta^{T+1}}{1-\delta}$$

これを代入すると，

$$x_{T+1} - x_0 = \sum_{t=0}^{T} \frac{w_t}{(1+r)^t} - c_0 \frac{1-\delta^{T+1}}{1-\delta} \tag{13}$$

が得られる．

(11) 式を用いて，k_t の式に戻す．

$$\frac{k_{T+1}}{(1+r)^T} - (1+r)k_0 = \sum_{t=0}^{T} \frac{w_t}{(1+r)^t} - c_0 \frac{1-\delta^{T+1}}{1-\delta} \tag{14}$$

［横断性条件］

(7), (8) 式より，

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t k_{t+1} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{k_{t+1}}{(1+r)^t} = 0 \tag{15}$$

(15) 式は，資産の割引現在価値が，遠い将来，ゼロになることを意味している．

［最適消費 c_0^*］

(14) 式で，$T \to \infty$ とする．(15) 式より，左辺第 1 項はゼロに収束する．右辺第 3 項は，$c_0/(1-\delta)$ に収束する．したがって，時点 0 の消費は，

$$c_0^* = (1-\delta)\left[(1+r)k_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{w_t}{(1+r)^t}\right] \tag{16}$$

で与えられる．

右辺の $\sum_{t=0}^{\infty} w_t/(1+r)^t$ は，将来に渡って受け取る賃金所得の割引現在価値の総和を表す．人的資産 (human wealth) という．資産所得 $(1+r)k_0$ と合わせたものが総資産．(16) 式は，総資産の一定割合を消費することを意味している．係数 $1-\delta = \rho/(1+\rho)$ のことを，資産に対する限界消費性向 (marginal propensity to consume out of wealth) という．

［時間整合性］

(16) 式で，消費 c_0^* が決まる．(4) 式より，次期の資産 $k_1 = w_0 + (1+r)k_0 - c_0^*$ が決まる．時点 1 で，改めて，最適消費 c_1^* を決めるとしよう．時点 1 での人的資産は，

$$w_1 + \frac{w_2}{1+r} + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w_t}{(1+r)^{t-1}}$$

なので，(16) 式から類推すると，

$$c_1^* = (1-\delta)\left[(1+r)k_1 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w_t}{(1+r)^{t-1}}\right] \tag{17}$$

となるだろう．

(17) 式は，時点 0 で計画された消費 c_1 と整合的だろうか．答えはイエス．(9) 式より，計画された消費は，

$$c_1 = c_0 \cdot \delta(1+r)$$

である．(16), (17) 式がこの関係式を満たすのは，

$$(1+r)k_1 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w_t}{(1+r)^{t-1}} = \delta(1+r)\left[(1+r)k_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{w_t}{(1+r)^t}\right]$$

のときに限られる．

ここで，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= (1+r)[w_0 + (1+r)k_0 - c_0^*] + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w_t}{(1+r)^{t-1}} \\
&= (1+r)\left\{w_0 + (1+r)k_0 - (1-\delta)\left[(1+r)k_0 + w_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w_t}{(1+r)^t}\right]\right\} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w_t}{(1+r)^{t-1}} \\
&= \delta(1+r)[w_0 + (1+r)k_0] + \delta \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w_t}{(1+r)^{t-1}} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}$$

が成立する．つまり，時点 0 で計画された消費 c_1 と，時点 1 で再選択するときの c_1^* は一致する．exponential discounter は，後悔しないという意味で，時間整合的である．

2　連続時間モデル

時点 0 における最適化問題

$$\max U_0 = \int_0^\infty e^{-\rho t} \ln c(t) dt \tag{18}$$

subject to

$$w(t) + rk(t) = c(t) + \dot{k}(t) \tag{19}$$

ただし，時点 0 における資産 $k(0)$ は所与.

$k(t)$ 資産，$c(t)$ 消費，$\dot{k}(t) = dk/dt$ 投資，$w(t)$ 賃金，r 利子率（一定），$0 < \rho < 1$ 割引率 (一定)

Hamiltonian

$$H = e^{-\rho t} \ln c + \lambda(w + rk - c) \tag{20}$$

Optimality conditions

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \Rightarrow e^{-\rho t} \cdot \frac{1}{c} - \lambda = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = -\dot{\lambda} \Rightarrow \lambda r = -\dot{\lambda} \tag{22}$$

横断性条件 (Transversality condition)

$$\lim_{t \to \infty} \lambda k = 0 \tag{23}$$

(21), (22) 式は，それぞれ，(5), (6) 式に対応する．(22) 式を (6) 式を用いて解釈する．(6) 式は，

$$r\lambda_{t+1} = \lambda_t - \lambda_{t+1}$$

と変形できる．左辺は，投資の金利から生ずる将来の便益を表す．右辺は，投資の元本に関するネットの費用を表す．投資により，現在消費が減り，現在の効用が λ_t だけ低下する．他方，元本は次期の所得に含まれるので，将来効用を λ_{t+1} だけ引き上げる．ネットの費用は $(\lambda_t - \lambda_{t+1})$ である．

以下，(19), (21), (22), (23) 式を用いて，時点 0 の最適消費 $c^*(0)$ を求める．

[将来消費 $c(t)$]

(22) 式より，

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -r$$

(21) 式より，

$$\ln \lambda = -\rho t - \ln c$$

両辺を t で微分する．

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\rho - \frac{\dot{c}}{c}$$

したがって，

$$\frac{\dot{c}}{c} = r - \rho \tag{24}$$

が成り立つ．オイラー方程式という．

(24) 式は，消費が $(r - \rho)$ の率で成長することを意味している．したがって，

$$c(t) = c(0)e^{(r-\rho)t} \tag{25}$$

が成り立つ．

[将来資産 $k(t)$]

(25) 式を (19) 式に代入する．便宜上，t の代わりに v を用いる．

$$\dot{k}(v) - rk(v) = w(v) - c(0)e^{(r-\rho)v} \tag{26}$$

ここで，我々は，

$$\begin{aligned}\left(k(v)e^{-rv}\right)' &= \dot{k}(v)e^{-rv} + k(v)(-re^{-rv}) \\ &= [\dot{k}(v) - rk(v)]e^{-rv}\end{aligned}$$

であることを知っている．

(26) 式の両辺に，e^{-rv} をかける．

$$[\dot{k}(v) - rk(v)]e^{-rv} = w(t)e^{-rv} - c(0)e^{-\rho v}$$

両辺を，区間 $[0, t]$ で積分する．

$$\left[k(v)e^{-rv}\right]_{v=0}^{t} = \int_0^t \left[w(v)e^{-rv} - c(0)e^{-\rho v}\right] dv$$

ここで，

$$\int_0^t e^{-\rho v} dv = \left[-\frac{1}{\rho}e^{-\rho v}\right]_{v=0}^{t} = \frac{1}{\rho}\left(1 - e^{-\rho t}\right)$$

であることを利用すると，

$$k(t)e^{-rt} = k(0) + \int_0^t w(v)e^{-rv}dv - c(0) \cdot \frac{1}{\rho}\left(1 - e^{-\rho t}\right) \tag{27}$$

が得られる．(27) 式から，時点 $t \geq 0$ での資産 $k(t)$ が求められる．

[横断性条件]

(21), (25) 式より，

$$\lambda(t)k(t) = e^{-\rho t} \cdot \frac{k(t)}{c(t)} = \frac{k(t)e^{-rt}}{c(0)}$$

が成り立つ．したがって，横断性条件 (6) 式より，

$$\lim_{t \to \infty} k(t)e^{-rt} = 0 \tag{28}$$

が成り立つ．(28) 式は，資産の割引現在価値が，遠い将来，ゼロになることを意味している．

[最適消費 $c^*(0)$]

(27) 式で，$t \to \infty$ とする．(28) 式を用いると，

$$0 = k(0) + \int_0^\infty w(v)e^{-rv}dv - \frac{c(0)}{\rho}$$

すなわち，

$$c^*(0) = \rho\left[k(0) + \int_0^\infty w(v)e^{-rv}dv\right] \tag{29}$$

が得られる．

第 2 項の $\int_0^\infty w(v)e^{-rv}dv$ は，将来に渡って受け取る賃金所得の割引現在価値の総和を表す．時点 0 での人的資産 (human wealth) という．これに資産 $k(0)$ を加えたものが，時点 0 における総資産である．(29) 式は，総資産のうち ρ の割合を消費することを意味している．ρ のことを，資産に対する限界消費性向 (marginal propensity to consume out of wealth) という．

[時間整合性]

時点 $t \geq 0$ での最適消費はどうなるか．(29) 式から類推すると，

$$c^*(t) = \rho \left[k(t) + \int_t^\infty w(v) e^{-r(v-t)} dv \right] \tag{30}$$

となるだろう．

(30) 式は，(25) 式の計画された消費と一致するか．答えはイエス．

(27) 式より，

$$\begin{aligned} k(t)e^{-rt} &= k(0) + \int_0^t w(v) e^{-rv} dv - c^*(0) \cdot \frac{1}{\rho} \left(1 - e^{-\rho t}\right) \\ &= k(0) + \int_0^t w(v) e^{-rv} dv - \left(1 - e^{-\rho t}\right) \left[k(0) + \int_0^\infty w(v) e^{-rv} dv \right] \\ &= e^{-\rho t} \left[k(0) + \int_0^\infty w(v) e^{-rv} dv \right] - \int_t^\infty w(v) e^{-rv} dv \end{aligned}$$

したがって，時点 t での資産は，

$$k(t) = e^{(r-\rho)t} \left[k(0) + \int_0^\infty w(v) e^{-rv} dv \right] - \int_t^\infty w(v) e^{-r(v-t)} dv$$

である．これを用いると，計画された消費は，

$$\begin{aligned} c(t) &= c^*(0) e^{(r-\rho)t} \\ &= \rho \left[k(0) + \int_0^\infty w(v) e^{-rv} dv \right] e^{(r-\rho)t} \\ &= \rho \left[k(t) + \int_t^\infty w(v) e^{-r(v-t)} dv \right] \end{aligned}$$

となり，(30) 式に一致する．

ある時点で再選択の機会が与えられたとしよう．exponential discounter にとっての最適消費は，(25) 式の計画された消費なので，選択を変える必要がない．後悔しないという意味で，時間整合的である．