公教育と出生率－財源の視点から－

宮澤　和俊

大学院「家族の経済学」レポート

1　はじめに

公教育を労働所得税を用いて供給するケースと，一括税を用いて供給するケースを比較する．労働所得税よりも，一括税の方が，(1) 出生率が低く，(2) 教育水準が高く，(3) 1 人あたり所得の成長率が高いことが示される．以下のモデルを読みながら，設問に答えよ[1]．

2　モデル

2.1　モデルの設定

家計，企業，政府からなる閉鎖経済を考える．家計や企業は同質であると仮定する．個人は，児童期と成年期という 2 期間を生きる．児童期は親の庇護下にあり，経済活動をおこなわない．成年期は労働を供給し，子どもを養育し，財を消費する．企業は，有効労働 (effective labor) を用いて財を生産する．有効労働とは，労働時間に人的資本を掛け合わせたものである．政府は，教員を雇用して公教育を供給する．公教育の財源は，労働所得税または一括税とする．労働市場，財市場はともに完全競争的であると仮定する．

$t-1$ 期に生まれ，t 期に働く世代を世代 t とよぶ．世代 t の人口を P_t とする．下付の t は，t 期の変数であることを表す．世代 t の出生率を n_t とすると，次世代（子ども世代）の人口は，

$$P_{t+1} = P_t n_t \tag{1}$$

で与えられる．

効用関数を，

$$u_t = \ln c_t + \gamma \ln(n_t h_{t+1}) \tag{2}$$

とする．c_t は消費，n_t は子どもの数（出生率），h_{t+1} は子どもの人的資本を表す．$\gamma > 0$ は，子どもへの利他の大きさを表す定数である．

生産関数を，

$$Y_t = F(L_t) = L_t \tag{3}$$

とする．L_t は財部門で雇用される有効労働，Y_t は生産量を表す．財の価格を $p_t = 1$ とすると，企業の利潤最大化行動および完全競争市場と整合的な賃金率は，$w_t = p_t = 1$ である．

問題 *1*

なぜ賃金率と財の価格が一致するのか，説明せよ．

[1] de la Croix, David (2013) Fertility, Education, Growth, and Sustainability, Cambridge University Press の 4 章をベースにしている．

人的資本形成は,

$$h_{t+1} = H(e_t, h_t, \bar{h}_t) = \mu(e_t)^{\eta}(h_t)^{\tau}(\bar{h}_t)^{1-\tau} \tag{4}$$

で与えられると仮定する．e_t は公教育（時間），h_t は親の人的資本，$\bar{h}_t$ は教員の人的資本を表す．$\mu > 0$ は全要素生産性を表す定数，$0 < \eta < 1$ は公教育の効率性を表す定数である．τ は親の貢献度を，$(1-\tau)$ は教員の貢献度を表す定数である $(0 < \tau < 1)$.

2.2 労働所得税

本節では，政府が労働所得税を課すケースを考える．家計の予算制約式は,

$$(1-v_t)h_t(1-\phi n_t) = c_t \tag{5}$$

である．$0 < \phi < 1$ は子ども 1 人あたりの養育時間を表す．家計は 1 単位の時間を，養育時間 ϕn_t と労働時間 $(1-\phi n_t)$ に配分する．親世代の人的資本は h_t であるので，$h_t(1-\phi n_t)$ が有効労働の供給を表す．$0 < v_t < 1$ は労働所得税率である．(5) 式は，課税後の可処分所得をすべて消費することを意味している．

家計の最適化問題は，次のように定式化される．

$$\max_{c_t,\, n_t} u_t = \ln c_t + \gamma \ln n_t + \gamma \ln h_{t+1}$$

subject to

$$(1-v_t)h_t = c_t + (1-v_t)h_t\phi n_t$$

子どもの人的資本 h_{t+1} は (4) 式で与えられるが，親にとっては所与である．

1 階の条件は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_t} &= \lambda_t \\ \frac{\gamma}{n_t} &= \lambda_t(1-v_t)h_t\phi\end{aligned}$$

である（λ_t はラグランジュ乗数）．

これを解くと，消費と出生率が得られる．上付の $*$ は，労働所得税のときの最適解を表す．

$$c_t^* = \frac{1-v_t}{1+\gamma}h_t \tag{6}$$

$$n_t^* = \frac{\gamma}{(1+\gamma)\phi} \tag{7}$$

問題 *2*

ラグランジュ乗数法を用いて，1 階の条件を導出せよ．また，(6), (7) 式を導出せよ．

(4), (6), (7) 式を (2) 式に代入すると，家計の経済厚生を表す間接効用関数が得られる．

$$\begin{aligned}V_t &= \ln\left(\frac{1-v_t}{1+\gamma}h_t\right) + \gamma\ln\left[\frac{\gamma}{(1+\gamma)\phi}\right] + \gamma\ln\left[\mu(e_t)^{\eta}(h_t)^{\tau}(\bar{h}_t)^{1-\tau}\right] \\ &= \ln(1-v_t) + \eta\gamma\ln e_t + (\text{定数})\end{aligned} \tag{8}$$

政府の予算制約式は,

$$P_t v_t h_t(1-\phi n_t) = P_{t+1}e_t\bar{h}_t \tag{9}$$

で与えられる．左辺は労働所得税収を，右辺は教員への給与支払総額を表している．

労働市場，財市場の均衡条件は，

$$L_t + P_{t+1}e_t\bar{h}_t = P_t h_t(1-\phi n_t) \tag{10}$$

$$Y_t = P_t c_t \tag{11}$$

で与えられる．

問題 *3*
財市場均衡条件 (11) 式は，他の式から導出できることを示せ（ワルラス法則）．

均衡では，教員の人的資本と親の人的資本は一致する（$\bar{h}_t = h_t$）．これと (1) 式を (9) 式に代入すると，

$$v_t(1-\phi n_t) = n_t e_t$$

さらに，(7) 式を代入すると，

$$e_t = \frac{\phi}{\gamma} v_t \tag{12}$$

が得られる．

政府は，予算制約 (12) 式のもとで，間接効用 (8) 式が最大となるように，税率 v_t を決める．均衡税率は，

$$v_t^* = \frac{\eta\gamma}{1+\eta\gamma} \tag{13}$$

である．

問題 *4*
均衡税率 (13) 式を導出せよ．

(12), (13) 式から，均衡教育時間が得られる．

$$e^* = \frac{\phi\eta}{1+\eta\gamma} \tag{14}$$

教育時間 e^* は，ϕ, η の増加関数であり，γ の減少関数である．

最後に，(4) 式から，1 人あたり所得の成長率が得られる．

$$g^* = \frac{h_{t+1}}{h_t} = \mu(e^*)^\eta \tag{15}$$

問題 *5*
教育時間 e^* が，ϕ, η の増加関数，γ の減少関数となる理由を，言葉で説明せよ．

例．ϕ が大きいとは，養育の機会費用が大きいという意味である．したがって，親は子どもの数を減らす（(7) 式）．少子化は，子ども 1 人あたりの教育時間 e^* を増やす効果を持つ（(12) 式）．その理由はこうである．本稿のモデルでは，ϕ が大きくなっても労働供給は不変である．

$$1-\phi n_t^* = \frac{1}{1+\gamma}$$

したがって，税収や教員の雇用には ϕ は影響しない．他方，子どもの数が減るので，S-T 比率（生徒と教員の比率）が下がる．これは，1 人あたり教育時間が増えることを意味している．

政府は，こうしたメカニズムを理解したうえで，税率を決定する．子どもの数が減ったのだから，税率を下げて，教員数を減らそうとするかもしれない．しかし，本稿のモデルでは，均衡税率は ϕ に依存しない（(13) 式）．したがって，上述の少子化の効果により，1 人あたり教育時間が増える．

2.3 一括税

本節では，一括税 (lump-sum tax) のケースを分析する．家計は，労働所得ではなく，稼得能力 h_t に応じて税を負担すると仮定する．税率を $0 < v_t < 1$ とおくと，一括税は，

$$T_t = v_t h_t \tag{16}$$

と表される．

家計の予算制約式は，

$$h_t(1 - \phi n_t) - T_t = c_t$$

すなわち，

$$(1 - v_t)h_t = c_t + h_t \phi n_t \tag{17}$$

となる．労働所得税では，子どもの価格を表す n_t の係数は $(1 - v_t)h_t\phi$ であったが，一括税では $h_t\phi$ である．労働所得税は，可処分所得を減らすという所得効果に加え，実質賃金率を引き下げることにより，養育の機会費用を下げるという価格効果を持つ．他方，一括税は，可処分所得を減らすだけで，子どもの価格には影響しない．したがって，一括税の方が，労働所得税よりも出生率が低くなるのではないかと予想される．

家計の最適化問題は，次のように定式化される．

$$\max_{c_t,\, n_t} u_t = \ln c_t + \gamma \ln n_t + \gamma \ln h_{t+1}$$

subject to

$$(1 - v_t)h_t = c_t + h_t \phi n_t$$

1 階の条件は，

$$\frac{1}{c_t} = \lambda_t$$
$$\frac{\gamma}{n_t} = \lambda_t h_t \phi$$

である（λ_t はラグランジュ乗数）．

これを解くと，消費と出生率が得られる．上付の $**$ は，一括税のときの最適解を表す．

$$c_t^{**} = \frac{1 - v_t}{1 + \gamma} h_t \tag{18}$$

$$n_t^{**} = \frac{\gamma(1 - v_t)}{(1 + \gamma)\phi} \tag{19}$$

問題 *6*

ラグランジュ乗数法を用いて，1 階の条件を導出せよ．また，(18), (19) 式を導出せよ．

(4), (18), (19) 式を (2) 式に代入すると，間接効用関数が得られる．

$$\begin{aligned} V_t &= \ln\left(\frac{1 - v_t}{1 + \gamma} h_t\right) + \gamma \ln\left[\frac{\gamma(1 - v_t)}{(1 + \gamma)\phi}\right] + \gamma \ln\left[\mu(e_t)^\eta (h_t)^\tau (\bar{h}_t)^{1-\tau}\right] \\ &= (1 + \gamma)\ln(1 - v_t) + \eta\gamma \ln e_t + (\text{定数}) \end{aligned} \tag{20}$$

政府の予算制約式は，

$$P_t v_t h_t = P_{t+1} e_t \bar{h}_t \tag{21}$$

で与えられる．

問題 *7*
労働市場の均衡条件は (10) 式，財市場の均衡条件は (11) 式である．(11) 式は，他の式から導出できることを示せ（ワルラス法則）．

均衡では，$\bar{h}_t = h_t$ が成り立つ．これと，(1) 式を (21) 式に代入すると，

$$v_t = n_t e_t$$

さらに，(19) 式を代入すると，

$$e_t = \frac{(1+\gamma)\phi}{\gamma}\frac{v_t}{1-v_t} \tag{22}$$

が得られる．

政府は，予算制約 (22) 式のもとで，間接効用 (20) 式が最大となるように，税率 v_t を決める．均衡税率は，次式で与えられる．

$$v_t^{**} = \frac{\eta\gamma}{1+\gamma} \tag{23}$$

問題 *8*
均衡税率 (23) 式を導出せよ．

(23) 式を (19), (22) 式に代入すると，均衡における出生率と教育時間が得られる．

$$n^{**} = \frac{\gamma}{(1+\gamma)\phi}\left(1-\frac{\eta\gamma}{1+\gamma}\right) \tag{24}$$

$$e^{**} = \frac{\phi\eta}{1-\frac{\eta\gamma}{1+\gamma}} \tag{25}$$

最後に，(4) 式から，1 人あたり所得の成長率が得られる．

$$g^{**} = \frac{h_{t+1}}{h_t} = \mu(e^{**})^\eta \tag{26}$$

2.4　比較

2.2 節と 2.3 節の結果を比較すると，次の命題が得られる．

命題 1 出生率は，一括税のときの方が労働所得税のときよりも低い．

$$n^{**} < n^* \tag{27}$$

命題 2 子ども *1* 人あたり公教育水準は，一括税のときの方が高い．したがって，*1* 人あたり所得の成長率は，一括税のときの方が高い．

$$e^{**} > e^* \tag{28}$$

$$g^{**} > g^* \tag{29}$$

問題 *9*
命題 1 を証明せよ．また，なぜそうなるのか，言葉で説明せよ．

問題 *10*
命題 2 を証明せよ．また，なぜそうなるのか，言葉で説明せよ．