Pareto-efficient residence and regional inequality

宮澤和俊*

1　はじめに

Wildasin (1991) のモデルを用いて，パレート最適な人口配分，消費配分，格差を調べる．

2　パレート最適

最適化問題は，次のように定式化できる．

$$\max_{c_1^R, c_1^P, c_2^R, c_2^P, l_1, l_2} u_1(c_1^R, c_1^P)$$

subject to

$$\bar{u} = u_2(c_2^R, c_2^P) \tag{1}$$

$$l_1 + l_2 = l \tag{2}$$

$$f_1(l_1) + f_2(l_2) = c_1^R + l_1 c_1^P + c_2^R + l_2 c_2^P \tag{3}$$

下付きの添え字は地域を表す（$i = 1, 2$）．上付きの R は rich，P は poor を表す．c_1^R は地域 1 の rich の消費，c_1^P は地域 1 の poor の消費である．目的関数は，地域 1 の効用関数である．(1) 式は，地域 2 の効用制約を表す（$\bar{u}$ は定数）．地域 i の poor の人口を l_i とする．(2) 式は，poor の人口制約を表す（$l > 0$ は定数）．地域 i の生産関数を，$y_i = f_i(l_i)$ とする．各地域の rich の人口は一定であり，1 とする．(3) 式は資源制約を表している．

ラグランジュ関数を，

$$L = u_1(c_1^R, c_1^P) + \lambda \left[u_2(c_2^R, c_2^P) - \bar{u}\right] + \mu (l - l_1 - l_2) + \gamma \left[f_1(l_1) + f_2(l_2) - c_1^R - l_1 c_1^P - c_2^R - l_2 c_2^P\right]$$

とおく（λ, μ, γ はラグランジュ乗数）．

1 階の条件は，

$$\frac{\partial L}{\partial c_1^R} = \frac{\partial u_1}{\partial c_1^R} - \gamma = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_1^P} = \frac{\partial u_1}{\partial c_1^P} - \gamma l_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_2^R} = \lambda \frac{\partial u_2}{\partial c_2^R} - \gamma = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_2^P} = \lambda \frac{\partial u_2}{\partial c_2^P} - \gamma l_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial l_1} = -\mu + \gamma [f_1'(l_1) - c_1^P] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial l_2} = -\mu + \gamma [f_2'(l_2) - c_2^P] = 0$$

である．

*Faculty of Economics, Doshisha Univeristy, Kamigyo, Kyoto 602-8580 Japan. kazu@mail.doshisha.ac.jp

乗数を消去すると，

$$MRS_1 = l_1 \tag{4}$$

$$MRS_2 = l_2 \tag{5}$$

$$f_1'(l_1) - c_1^P = f_2'(l_2) - c_2^P \tag{6}$$

が得られる．ただし，

$$MRS_i = \frac{\partial u_i / \partial c_i^P}{\partial u_i / \partial c_i^R}$$

である．限界代替率 MRS_i は，地域 i において，poor の消費が 1 単位増えるならば手放しても良いと考える rich の消費量を表す.

poor の消費が 1 単位増えたとする．効用で測ると，rich の消費が MRS_i 単位増えた効果と同じである．poor の人口は l_i なので，消費が 1 単位増えると資源が $1 \times l_i = l_i$ だけ必要になる．(4), (5) 式は，両地域において，poor の消費の限界便益と限界費用が一致することを意味している．

地域 1 に poor を 1 人追加したとする．生産量が $f_1'(l_1)$ だけ増える．他方，1 人分の消費 c_1^P だけ資源が減る．(6) 式の左辺は，地域 1 に poor を 1 人追加したときのネットの限界便益を表す．同様にして，右辺は，地域 2 に poor を 1 人追加したときのネットの限界便益を表す．左辺が右辺よりも大きいとき，地域 2 の poor を地域 1 に移すことでより大きな便益が得られる．逆は逆．(6) 式は，これ以上 poor の人口配分を変更してもネットの限界便益を増やせないことを意味している．

6 つの変数 $c_1^R, c_1^P, c_2^R, c_2^P, l_1, l_2$ について，(1)-(6) 式の 6 本の方程式があるので解ける．以下，効用関数と生産関数を特定化して，効率解を求める．

効用関数を，

$$u_i = (1-\beta) \ln c_i^R + \beta \ln c_i^P$$

とする．限界代替率は，

$$MRS_i = \frac{\beta}{1-\beta} \frac{c_i^R}{c_i^P}$$

(4), (5) 式より，

$$l_i c_i^P = \frac{\beta}{1-\beta} c_i^R \tag{7}$$

を得る．

(7) 式を (3) 式に代入すると，

$$c_1^R + c_2^R = (1-\beta)(y_1 + y_2) \tag{8}$$

を得る．(8) 式は，総資源のうち $(1-\beta)$ の割合を rich に配分し，β の割合を poor に配分することを意味している．

次に，生産関数を特定化する．地域 i の労働の生産弾力性が α_i で一定であるとする．

$$\alpha_i = \frac{l_i}{y_i} \frac{dy_i}{dl_i} \tag{9}$$

(9) 式を (6) 式に代入する．

$$\frac{\alpha_1 y_1 - c_1^P l_1}{l_1} = \frac{\alpha_2 y_2 - c_2^P l_2}{l_2}$$

さらに，(7) 式を代入すると，

$$\alpha_1 y_1 - \frac{\beta}{1-\beta} c_1^R = \frac{l_1}{l_2} \left[\alpha_2 y_2 - \frac{\beta}{1-\beta} c_2^R \right] \tag{10}$$

を得る．

(8), (10) 式を用いて，c_1^R, c_2^R を解く．

$$c_1^R = \frac{1-\beta}{\beta l}\left[(\alpha_1 l_2 + \beta l_1)y_1 - (\alpha_2 - \beta)l_1 y_2\right] \tag{11}$$

$$c_2^R = \frac{1-\beta}{\beta l}\left[(\alpha_2 l_1 + \beta l_2)y_2 - (\alpha_1 - \beta)l_2 y_1\right] \tag{12}$$

他方，(7) 式を (1) 式に代入する．

$$\bar{u} = (1-\beta)\ln c_2^R + \beta \ln\left(\frac{\beta}{1-\beta}\frac{c_2^R}{l_2}\right)$$

この式を整理すると，c_2^R と l_2 の関係式が得られる．

$$c_2^R = \theta l_2^\beta, \quad \theta = \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^{-\beta} e^{\bar{u}} \tag{13}$$

最後に，(2), (12), (13) 式から l_2 の方程式が得られる．

$$\theta l_2^\beta = \frac{1-\beta}{\beta l}\left\{\left[\alpha_2 l - (\alpha_2 - \beta)l_2\right] f_2(l_2) - (\alpha_1 - \beta)l_2 f_1(l - l_2)\right\} \tag{14}$$

(14) 式は，$l_2^* = 0$ を解に持つがここでは除外する．

(14) 式の左辺は，原点を通る右上がりで上に凸の曲線．$l_2 \to 0$ のとき接線の傾きは無限大．

(14) 式の右辺を $\phi(l_2)$ とおく．

$$\phi(0) = 0$$
$$\phi(l) = (1-\beta)f_2(l) > 0$$

であり，

$$\phi'(l_2) = \frac{1-\beta}{\beta l}\left\{-(\alpha_2 - \beta)f_2(l_2) + \left[\alpha_2 l - (\alpha_2 - \beta)l_2\right] f_2'(l_2) - (\alpha_1 - \beta)\left[f_1(l - l_2) - l_2 f_1'(l - l_2)\right]\right\}$$

以下，

$$\lim_{l_2 \to 0} f_2'(l_2) < \infty \tag{15}$$

と仮定する．このとき，

$$\lim_{l_2 \to 0} \phi'(l_2) < \infty$$

が成り立つ．原点付近では,（左辺）＞（右辺）である．

(14) 式が内点解を持つための十分条件は，区間の右端で（左辺）＜（右辺）となることである．

$$\theta l^\beta < (1-\beta)f_2(l) \tag{16}$$

(15), (16) 式が成立するとき，(14) 式を満たす $0 < l_2^* < l$ が存在する．

3　数値例

poor の総人口　$l = 2$ とする（rich の人口と poor の人口が同じ）．

生産関数

地域 2　$f_2(l_2) = A_2 l_2$ とする（$\alpha_2 = 1$）．(15) 式が成立する．

地域 1　$f_1(l_1) = A_1(l_1)^{\alpha_1}$ とする．労働分配率を $\alpha_1 = 0.7$ とする．

両地域の TFP を同じとする（$A_1 = A_2 = 10$）．

効用関数

poor の消費のウェイトを $\beta = 0.4$ とする．

(16) 式より，$\theta \times 2^\beta < (1-\beta) \times 2A_2 \Leftrightarrow \theta < 9.09$．この範囲で θ の値（$\bar{u}$ の値）を変化させる．

Figure 1. Population in region 2 (l_2^*)

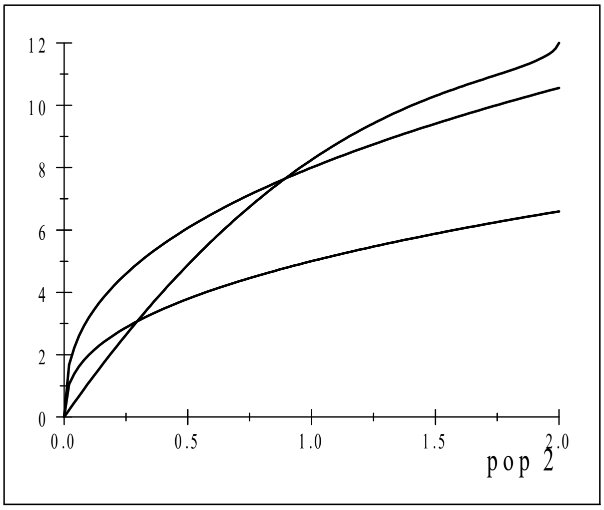

Figure 1 は，(14) 式の左辺と右辺を図示したもの．不規則な曲線が右辺を表す．2 本の曲線は左辺を表す（下が $\theta = 5$ のとき．上が $\theta = 8$ のとき）．なお，$\theta = 5 \Leftrightarrow \bar{u} = 1.447$，$\theta = 8 \Leftrightarrow \bar{u} = 1.917$ である．地域 2 の留保効用 $\bar{u}$ が大きいほど，左辺は上にシフトする．交点が右上に移動する．つまり，地域 2 の poor の人口 l_2^* が大きくなる．

Table 1. Pareto-efficient allocation

		地域 1	地域 2
poor の人口	l_i	1.108	0.892
生産量	y_i	10.74	8.92
rich の消費	c_i^R	4.155	7.643
poor の消費	c_i^P	2.500	5.712

Note. $\bar{u} = 1.917$

Table 1 は，$\theta = 8$（$\bar{u} = 1.917$）のときの配分をまとめたものである．地域 1 の総消費は，地域 1 の生産量よりも少ない（$c_1^R + l_1 c_1^P = 6.925$，$y_1 = 10.74$）．つまり，地域 1 の生産物の一部が地域 2 に移転されている．両地域の消費を比較すると，地域 2 の留保効用 $\bar{u}$ が高めに設定されていることが分かる．このときの最適な配分とは，地域 1 の poor の人口を増やし，地域 1 の poor の消費を抑え，余剰を地域 2 に移転することである．

この点を確認するために，生産量を最大にする人口配分を考えよう．生産量が最大になるのは，両地域の労働の限界生産力が一致するとき，つまり，

$$10 \times 0.7 l_1^{-0.3} = 10 \Leftrightarrow l_1 = 0.305$$

のときである．この値と Table 1 の l_1 を比べると，地域 1 に poor が集められていることが分かる．

次に，地域 1 の poor の消費が小さくなる理由を説明する．(6) 式より，住民の消費を含んだネットの限界生産物は両地域で一致する．地域 1 の poor の人口が増えると，左辺第 1 項の f_1' が小さくなる．したがって，等号が成立するように c_1^P が低下する．他方，地域 2 では，l_2 が減り，c_2^P が大きくなる．

本稿のモデルは，「最適な格差」も分析できる．(7) 式より，

$$\frac{c_i^P}{c_i^R} = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{l_i}$$

が成り立つ．住民の選好が同じであるとき，地域内の消費格差は，地域の poor の人口に反比例する．Table 1 のケースでは，地域 1 の方が poor の人口が多いので，消費で測った地域内格差は，地域 1 の方が大きくなる．

Table 2. Pareto-efficient allocation

		地域 1	地域 2
poor の人口	l_i	1.705	0.295
生産量	y_i	14.528	2.95
rich の消費	c_i^R	7.418	3.069
poor の消費	c_i^P	2.900	6.936

Note. $\bar{u} = 1.447$

Table 2 は，$\theta = 5$（$\bar{u} = 1.447$）のときの配分をまとめたものである．地域の生産量と総消費を比較すると，地域 1 から地域 2 への移転が生じていることが分かる．地域 1 は poor の人口が多いので，地域内格差も大きい．[1]

4 おわりに

参考文献

[1] Wildasin DE. (1991) Income redistribution in a common labor market. *American Economic Review*. 81, 757-774.

[1]Table 2 では，$c_2^R < c_2^P$ となっている．本稿のモデルでは，

$$c_i^R > c_i^P \Leftrightarrow l_i > \frac{\beta}{1-\beta}$$

が成り立つ．地域 2 ではこの関係式が成立しないため，消費の逆転現象が生じている．数値例では，$l = 2, \beta = 0.4$ としている．poor の総人口を大きくする，あるいは poor の選好ウェイトを小さくすると逆転現象は生じない．