集積の利益，混雑効果，再分配政策

宮澤和俊*

1　はじめに

Fajgelbaum and Gaubert (2020) を用いて，集積の利益と混雑効果があるときの人口分布の性質を調べる．集積の利益とは，労働者の密度が高くなるときに労働者 1 人あたり生産量が増えることを指す．混雑効果とは，人口密度が増えることで地域の快適さ (amenity) が低下することを指す．

2.1 節ではモデルの設定を説明する．2.2 節では各地域が自給自足経済にあるときの均衡を導出する．2.3 節では財が取引できるときの社会的最適解を導出する．2.4 節では，中央政府の地域間再分配政策が経済全体の厚生を改善するための条件を求める．3 節では数値例を示す．最後の 4 節はまとめである．

2　基本モデル

2.1　モデルの設定

2 地域モデルを用いる．地域 $j = 1, 2$ の人口を L_j とし，総人口を L（一定）とすると，人口制約式は，

$$L = L_1 + L_2 \tag{1}$$

で与えられる．

地域 j の住民の効用関数を，

$$u_j = a_j(L_j)c_j \tag{2}$$

とする．c_j は tradable good の消費を表し，a_j は地域 j の amenity を表す．

amenity は地域の人口に依存する．Fajgelbaum and Gaubert (2020) にしたがい，amenity の人口弾力性は一定であると仮定する．

$$a_j(L_j) = A_j(L_j)^{\gamma_A} \tag{3}$$

$A_j > 0$ は地域固有の amenity を表す定数であり，γ_A は弾力性を表す．$\gamma_A > 0$ のときは外部経済，$\gamma_A < 0$ のときは外部不経済（混雑効果）を表す．

地域 j の労働者 1 人あたり生産量を，

$$z_j = z_j(L_j)$$

とする．人口弾力性は一定であると仮定する．

$$z_j = Z_j(L_j)^{\gamma_P} \tag{4}$$

$Z_j > 0$ は地域固有の生産性を表す定数であり，γ_P は弾力性を表す．$\gamma_P > 0$ のときは外部経済（集積の利益），$\gamma_P < 0$ のときは外部不経済を表す．

資源制約式は，

$$L_1z_1 + L_2z_2 = L_1c_1 + L_2c_2 \tag{5}$$

で与えられる．

*Faculty of Economics, Doshisha Univeristy, Kamigyo, Kyoto 602-8580 Japan. kazu@mail.doshisha.ac.jp

最後に，人々は費用をかけずに自由に地域を選択できると仮定すると，均衡では，

$$u_1 = u_2 \tag{6}$$

が成り立つ．(6) 式を移住均衡条件という．

2.2 自給自足経済

本節では，自地域で生産したものは自地域で消費すると仮定する．

$$z_j = c_j \tag{7}$$

(3), (4), (7) 式を (2) 式に代入すると，

$$u_j = A_j Z_j (L_j)^{\gamma_A + \gamma_P}$$

を得る．これらを (6) 式に代入すると，

$$A_1 Z_1 (L_1)^{\gamma_A + \gamma_P} = A_2 Z_2 (L_2)^{\gamma_A + \gamma_P} \tag{8}$$

を得る．

(1), (8) 式を L_1, L_2 の連立方程式とみなして解くと，人口分布が求められる．

$$L_1^c = \frac{(A_1 Z_1)^{-\frac{1}{\gamma_A + \gamma_P}}}{(A_1 Z_1)^{-\frac{1}{\gamma_A + \gamma_P}} + (A_2 Z_2)^{-\frac{1}{\gamma_A + \gamma_P}}} \tag{9.1}$$

$$L_2^c = \frac{(A_2 Z_2)^{-\frac{1}{\gamma_A + \gamma_P}}}{(A_1 Z_1)^{-\frac{1}{\gamma_A + \gamma_P}} + (A_2 Z_2)^{-\frac{1}{\gamma_A + \gamma_P}}} \tag{9.2}$$

ただし，上付きの c は，自給自足経済での均衡を表す．

人口分布は弾力性の大きさに依存する．たとえば，集積の利益 $\gamma_P > 0$ よりも混雑効果 $\gamma_A < 0$ の方が絶対値でみて大きいとする．

$$\gamma_A + \gamma_P < 0$$

このとき，L_j^c は $A_j Z_j$ の増加関数となる．つまり，固有の労働生産性が高い地域ほど，または固有の amenity が高い地域ほど，地域人口が大きくなる．

(9.1), (9.2) 式を (8) 式に代入すると，住民の効用は次式で与えられる．

$$u_1 = u_2 = \left[(A_1 Z_1)^{-\frac{1}{\gamma_A + \gamma_P}} + (A_2 Z_2)^{-\frac{1}{\gamma_A + \gamma_P}} \right]^{-(\gamma_A + \gamma_P)} \equiv u^c \tag{10}$$

2.3 社会的最適

財は tradable なので，(7) 式の地産地消の制約条件は必ずしも必要ではない．人口制約，資源制約，移住均衡条件の 3 条件を満たす資源配分の中で，住民の効用がもっとも高くなる配分を社会的最適と定義する．

社会的最適は次式で定式化される．

$$\max_{c_1,\, c_2,\, L_1,\, L_2} \; u_1 = a_1(L_1) c_1$$

subject to

$$L = L_1 + L_2 \tag{1}$$

$$L_1 z_1(L_1) + L_2 z_2(L_2) = L_1 c_1 + L_2 c_2 \tag{5}$$

$$a_1(L_1) c_1 = a_2(L_2) c_2 \tag{6}$$

ラグランジュ関数を，

$$
\begin{aligned}
\Phi &= a_1(L_1)c_1 + \lambda\,(L - L_1 - L_2) \\
&\quad + \mu\,[L_1 z_1(L_1) + L_2 z_2(L_2) - L_1 c_1 - L_2 c_2] \\
&\quad + \pi\,[a_2(L_2)c_2 - a_1(L_1)c_1]
\end{aligned}
$$

とおく．$\lambda > 0, \mu > 0, \pi > 0$ はラグランジュ乗数を表す．

1 階の条件は，

$$
\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = (1-\pi)a_1 - \mu L_1 = 0 \tag{11}
$$

$$
\frac{\partial \Phi}{\partial c_2} = \pi a_2 - \mu L_2 = 0 \tag{12}
$$

$$
\frac{\partial \Phi}{\partial L_1} = (1-\pi)a_1'(L_1)c_1 - \lambda + \mu\,[z_1 + L_1 z_1'(L_1) - c_1] = 0 \tag{13}
$$

$$
\frac{\partial \Phi}{\partial L_2} = \pi a_2'(L_2)c_2 - \lambda + \mu\,[z_2 + L_2 z_2'(L_2) - c_2] = 0 \tag{14}
$$

である．

(3), (4) 式の弾力性一定の仮定から，

$$
\begin{aligned}
\frac{L_j}{a_j} a_j'(L_j) &= \gamma_A \\
\frac{L_j}{z_j} z_j'(L_j) &= \gamma_P
\end{aligned}
$$

これらを (13) 式に代入する．

$$
\lambda = (1-\pi)\gamma_A \frac{a_1}{L_1} c_1 + \mu\,[(1+\gamma_P)z_1 - c_1]
$$

さらに，(11) 式を用いて $(1-\pi)a_1$ を消去すると，

$$
\lambda = \mu\,[(1+\gamma_P)z_1 - (1-\gamma_A)c_1] \tag{15}
$$

を得る．

同様にして，(14) 式から，

$$
\lambda = \mu\,[(1+\gamma_P)z_2 - (1-\gamma_A)c_2] \tag{16}
$$

を得る．

(15), (16) 式より，

$$
(1+\gamma_P)(z_1 - z_2) = (1-\gamma_A)(c_1 - c_2) \tag{17}
$$

が得られる．

集積の経済と混雑効果が存在するとき（$\gamma_P > 0 > \gamma_A$），

$$
c_1 \gtreqless c_2 \Leftrightarrow z_1 \gtreqless z_2
$$

が成り立つ．労働者 1 人あたり生産量の多い地域では 1 人あたり消費量が大きくなる．

社会的最適解 $(c_1^*, c_2^*, L_1^*, L_2^*)$ は，(1), (5), (6), (17) 式から得られる．

まず，(17), (5) 式を行列を用いて表す．

$$
\begin{pmatrix} 1-\gamma_A & -(1-\gamma_A) \\ L_1 & L_2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1+\gamma_P & -(1+\gamma_P) \\ L_1 & L_2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}
$$

左辺の 2×2 行列の行列式は，$\Delta = (1-\gamma_A)L > 0$ である．両辺左から逆行列をかけると，

$$
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}
= \frac{1}{(1-\gamma_A)L}
\begin{pmatrix} L_2 & 1-\gamma_A \\ -L_1 & 1-\gamma_A \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1+\gamma_P & -(1+\gamma_P) \\ L_1 & L_2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}
$$

を得る．各地域の消費水準は次式で与えられる．

$$c_1^* = \frac{[(1-\gamma_A)L_1 + (1+\gamma_P)L_2]\, z_1 - (\gamma_P+\gamma_A)L_2 z_2}{(1-\gamma_A)L}$$
$$c_2^* = \frac{-(\gamma_P+\gamma_A)L_1 z_1 + [(1+\gamma_P)L_1 + (1-\gamma_A)L_2]\, z_2}{(1-\gamma_A)L}$$

次に，(4) 式の $z_j = Z_j L_j^{\gamma_P}$ を代入する．

$$c_1^* = \frac{Z_1 [(1-\gamma_A)L_1 + (1+\gamma_P)L_2]\, L_1^{\gamma_P} - Z_2(\gamma_P+\gamma_A)L_2^{1+\gamma_P}}{(1-\gamma_A)L}$$
$$c_2^* = \frac{-Z_1(\gamma_P+\gamma_A)L_1^{1+\gamma_P} + Z_2 [(1+\gamma_P)L_1 + (1-\gamma_A)L_2]\, L_2^{\gamma_P}}{(1-\gamma_A)L}$$

便宜上,

$$L_2 = \theta L_1 \tag{18}$$

とおく（$0<\theta<\infty$）．$L = L_1 + L_2$ より，$L_1 = L/(1+\theta), L_2 = \theta L/(1+\theta)$ である．上式に代入すると次式を得る．

$$c_1^* = \frac{L_1^{1+\gamma_P}\left\{Z_1 [1-\gamma_A + (1+\gamma_P)\theta] - Z_2(\gamma_P+\gamma_A)\theta^{1+\gamma_P}\right\}}{(1-\gamma_A)L}$$
$$c_2^* = \frac{L_1^{1+\gamma_P}\left\{-Z_1(\gamma_P+\gamma_A) + Z_2 [1+\gamma_P + (1-\gamma_A)\theta]\, \theta^{\gamma_P}\right\}}{(1-\gamma_A)L}$$

最後に，(3) 式の $a_j = A_j L_j^{\gamma_A}$ と，上の c_1^*, c_2^* を (6) 式の移住均衡条件に代入する．

$$A_1 L_1^{\gamma_A} \times \frac{L_1^{1+\gamma_P}\left\{Z_1 [1-\gamma_A + (1+\gamma_P)\theta] - Z_2(\gamma_P+\gamma_A)\theta^{1+\gamma_P}\right\}}{(1-\gamma_A)L}$$
$$= A_2 (\theta L_1)^{\gamma_A} \times \frac{L_1^{1+\gamma_P}\left\{-Z_1(\gamma_P+\gamma_A) + Z_2 [1+\gamma_P + (1-\gamma_A)\theta]\, \theta^{\gamma_P}\right\}}{(1-\gamma_A)L}$$

この式を整理すると，θ の方程式が得られる．

$$A_1 \left\{Z_1 [1-\gamma_A + (1+\gamma_P)\theta] - Z_2(\gamma_P+\gamma_A)\theta^{1+\gamma_P}\right\} = A_2 \theta^{\gamma_A} \left\{-Z_1(\gamma_P+\gamma_A) + Z_2 [1+\gamma_P + (1-\gamma_A)\theta]\, \theta^{\gamma_P}\right\} \tag{19}$$

混雑効果が集積の利益よりも大きいとき（$\gamma_P + \gamma_A < 0$），(19) 式の左辺は θ の増加関数である．また，$1+\gamma_P+\gamma_A > 0$ のとき，右辺は θ に関して U 字型になる．(19) 式が解を持つかどうかは，3 節で数値例を用いて説明する．

2.4 所得再分配政策

初期の経済が 2.2 節の自給自足均衡にあるとする．中央政府が地域 1 の住民に一括税を課し，税収を地域 2 の住民に一括移転するという再分配政策を導入するとアナウンスしたとしよう．これにより，地域 1 から地域 2 への移住が生じる．移住により経済全体の厚生が改善する可能性がある．本節では，政策の導入が厚生を改善するための条件を調べる．

自給自足経済は，次の 6 本の方程式で記述される（上付きの c を省略する）．

$$u = a_1(L_1)c_1 = a_2(L_2)c_2 \tag{6}$$
$$L = L_1 + L_2 \tag{1}$$
$$L_1 z_1(L_1) + L_2 z_2(L_2) = L_1 c_1 + L_2 c_2 \tag{5}$$

and

$$z_j = c_i \tag{7}$$

地域 j の住民へのネットの移転を t_j とすると（$t_2 \geq 0 \geq t_1$），(7) 式は，

$$z_j + t_j = c_j \tag{20}$$

と修正される．

政府予算制約式は，

$$L_1 t_1 + L_2 t_2 = 0 \tag{21}$$

である．(5), (20) 式から (21) 式が導かれるので，以下の分析では (21) 式を用いない．

再分配政策により，地域 2 の人口が $dL_2 > 0$ だけ増えたとしよう．(1) 式より，$dL_1 = -dL_2 < 0$ である．まず，(6) 式より，

$$c_1 = \frac{u}{a_1(L_1)}$$
$$c_2 = \frac{u}{a_2(L_2)}$$

これらを (5) 式に代入し，u について解くと，

$$u = \frac{L_1 z_1(L_1) + L_2 z_2(L_2)}{\frac{L_1}{a_1(L_1)} + \frac{L_2}{a_2(L_2)}} \tag{22}$$

を得る．この式の両辺の対数を取り，全微分する．

$$\frac{du}{u} = \frac{(z_1 + L_1 z_1')\, dL_1 + (z_2 + L_2 z_2') dL_2}{L_1 z_1 + L_2 z_2} - \frac{\frac{a_1 - L_1 a_1'}{(a_1)^2} dL_1 + \frac{a_2 - L_2 a_2'}{(a_2)^2} dL_2}{\frac{L_1}{a_1} + \frac{L_2}{a_2}}$$

ここで，(3), (4) 式

$$\frac{L_j z_j'}{z_j} = \gamma_P$$
$$\frac{L_j a_j'}{a_j} = \gamma_A$$

を用いて整理する．

$$\frac{du}{u} = \frac{(1+\gamma_P)\,(z_1 dL_1 + z_2 dL_2)}{L_1 z_1 + L_2 z_2} - \frac{(1-\gamma_A)\left(\frac{dL_1}{a_1} + \frac{dL_2}{a_2}\right)}{\frac{L_1}{a_1} + \frac{L_2}{a_2}}$$

さらに，$a_j = u/c_j$ を第 2 項に代入すると，

$$\frac{du}{u} = \frac{(1+\gamma_P)\,(z_1 dL_1 + z_2 dL_2)}{L_1 z_1 + L_2 z_2} - \frac{(1-\gamma_A)\,(c_1 dL_1 + c_2 dL_2)}{L_1 c_1 + L_2 c_2}$$

と変形できる．

地域ごとの生産量を Y_j，経済全体の生産量を Y と表記する．

$$Y_j = L_j z_j$$
$$Y = Y_1 + Y_2$$

(5) 式の資源制約から，

$$\frac{du}{u} = \frac{(1+\gamma_P)\,(z_1 dL_1 + z_2 dL_2) - (1-\gamma_A)\,(c_1 dL_1 + c_2 dL_2)}{Y}$$

を得る．さらに，(20) 式より，$z_j - c_j = -t_j$ なので，

$$\frac{du}{u} = \frac{\gamma_P\,(z_1 dL_1 + z_2 dL_2) + \gamma_A\,(c_1 dL_1 + c_2 dL_2) - (t_1 dL_1 + t_2 dL_2)}{Y} \tag{23}$$

と表すことができる[1]．

[1] Fajgelbaum and Gaubert (2020) の (1) 式（p.967）．

最後に，$dL_1 = -dL_2$ を (23) 式に代入し，$t_1 = t_2 = 0$ で評価すると（$c_j = z_j$），次式が得られる[2].

$$\frac{du}{u} = (\gamma_P + \gamma_A)(z_2 - z_1)\frac{dL_2}{Y} \tag{24}$$

混雑効果の方が集積の利益よりも大きいとする（$\gamma_P + \gamma_A < 0$）．このとき，(24) 式より，

$$\frac{du}{dL_2} > 0 \Leftrightarrow z_1 > z_2$$

が成り立つ．自給自足経済において地域 2 の方が 1 人あたり生産量の少ないとする．このとき，地域 1 から地域 2 への再分配政策を導入し，地域 2 への移住を促すことで，経済全体の厚生が改善される．

また，$u_1 = u_2 \Leftrightarrow a_1 z_1 = a_2 z_2$ より，

$$z_1 > z_2 \Leftrightarrow a_1 < a_2$$

が成り立つ．自給自足経済において地域 2 の方が amenity の水準が高いとする．このとき，再分配政策を用いて地域 2 への移住を促すことで経済全体の厚生が改善する．

3　数値例

2.3 節の社会的最適解の数値例を示し，自給自足経済と比較する．また，社会的最適を達成するための再分配政策の大きさを調べる．

パラメータの値を次のように設定する．固有の労働生産性は地域 1 の方が高く，amenity は地域 2 の方が高いと仮定している．外部性については，$-1 < \gamma_P + \gamma_A < 0$ となるように設定している．

地域 1 $(Z_1, A_1) = (5, 1)$
地域 2 $(Z_2, A_2) = (2, 2)$
集積の利益 $\gamma_P = 0.1$
混雑効果 $\gamma_A = -0.2$
総人口 $L = 1$

Figure 1. 最適な人口分布 $\theta^* = L_2/L_1$

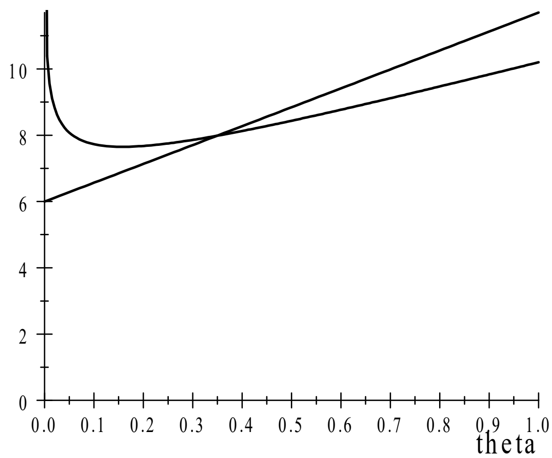

Figure 1 は，(19) 式の左辺と右辺をグラフにしたものである．右上がりの曲線が左辺を表し，U 字型の曲線が右辺を表す．(19) 式の解は，$\theta^* = 0.350$ である．人口分布は，$L_1^* = 0.741$，$L_2^* = 0.259$ である．

[2]Fajgelbaum and Gaubert (2020) の (3) 式（p.968）.

Table 1. 社会的最適

	地域 1	地域 2
人口 L_j^*	0.741	0.259
生産量 z_j^*	4.852	1.747
消費量 c_j^*	4.785	1.939
amenity a_j^*	1.062	2.620
効用 u^*	5.081	5.081

Table 1 は，社会的最適解をまとめたものである．固有の労働生産性が高いので，地域 1 の方が 1 人あたり生産量が多い．他方，amenity の水準は地域 2 の方が高い．生産量と消費量を比較すると，地域 1 の住民に課税し，税収を地域 2 の住民に移転していることが分かる（$t_1^* = c_1^* - z_1^* = -0.067, t_2^* = c_2^* - z_2^* = 0.192$）．政府の予算制約 (21) 式は満たされている．税率は 1.4% ，移転率は 11% である（$t_1^*/z_1^* = -0.0138, t_2^*/z_2^* = 0.1097$）.

Table 2. 自給自足均衡

	地域 1	地域 2
人口 L_j^c	0.903	0.097
生産量 z_j^c	4.949	1.584
消費量 c_j^c	4.949	1.584
amenity a_j^c	1.021	3.189
効用 u^c	5.051	5.051

社会的最適解を自給自足経済と比較することで，再分配政策の効果を知ることができる．Table 2 は，自給自足均衡をまとめたものである．人口分布は (9.1), (9.2) 式から求められる．固有の生産性が高いので，地域 1 の人口が全体の 9 割を占めている．1 人あたり生産量は地域 1 の方が多く，amenity の水準は地域 2 の方が高い．したがって，2.4 節の (24) 式で示されたように，地域 1 から地域 2 への移住を促すことで経済厚生が改善する．Table 1 と Table 2 を比較すると，地域 1 の人口の 2 割弱が地域 2 に移住している（$L_1^*/L_1^c = 0.82$）．これにより，地域 1 の混雑効果が緩和され，amenity の水準が上昇している（$a_1^*/a_1^c = 1.04$）．他方，地域 2 では人口流入により集積の利益が生じ，労働生産性が 10% 上昇している（$z_2^*/z_2^c = 1.10$）．経済厚生は 0.6% 改善している（$u^*/u^c = 1.006$）．個々の労働者や企業が集積の利益や混雑効果といった外部性を考慮せずに行動するとしよう．このとき，第三者としての中央政府が移住を促す政策をおこなうことで外部性が内部化され，経済厚生が改善される．

4　おわりに

参考文献

[1] Fajgelbaum PD, Gaubert C. (2020) Optimal spatial policies, geography, and sorting. *Quarterly Journal of Economics*. 135, 959-1036.