最適な所得分配

宮澤和俊*

1 Introduction

2 Model

n 人の個人からなる経済を考える．個人は稼得能力（労働生産性）に差があるとする．個人 i の稼得能力 h_i について，

$$h_1 \le h_2 \le \cdots \le h_n$$

が成り立つと仮定する（$i = 1, ..., n$）．

個人 i の効用関数を，

$$u_i = U(c_i, m_i) \tag{1}$$

とする．c_i は消費を，m_i は余暇を表す．

個人は 1 単位の時間を労働と余暇に配分する．労働を l_i とすると，時間制約式は，

$$1 = l_i + m_i \tag{2}$$

で与えられる．

生産関数を，

$$y = f(L) \tag{3}$$

とする．ただし，L は有効労働を表す．

$$L = \sum_{i=1}^{n} h_i l_i \tag{4}$$

資源制約式は，

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i \tag{5}$$

である．

2.1 社会的最適

本節では社会的に最適な所得分配を導出する．

社会厚生関数を，

$$W = W(u_1, ..., u_n) \tag{6}$$

とする．

(1)-(5) 式を踏まえ，次の最適化問題の解を社会的最適と定義する．

$$\max_{c_i, l_i} W\left(U(c_1, 1 - l_1), ..., U(c_n, 1 - l_n)\right)$$

*Faculty of Economics, Doshisha Univeristy, Kamigyo, Kyoto 602-8580 Japan. kazu@mail.doshisha.ac.jp

subject to

$$f\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} h_i l_i\right) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} c_i \tag{7}$$

ラグランジュ関数を，

$$L = W\left(U(c_1, 1-l_1), ..., U(c_n, 1-l_n)\right) + \lambda\left[f\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} h_i l_i\right) - \sum\nolimits_{i=1}^{n} c_i\right]$$

とおく．$\lambda > 0$ はラグランジュ乗数である．

1 階の条件は，

$$\frac{\partial L}{\partial c_i} = W_i \frac{\partial u_i}{\partial c_i} - \lambda = 0 \quad (i = 1, ..., n) \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial l_i} = -W_i \frac{\partial u_i}{\partial m_i} + \lambda h_i f'(L) = 0 \quad (i = 1, ..., n) \tag{9}$$

である．

$(2n+1)$ 個の変数 c_i, l_i, λ について，(7), (8), (9) 式の $(2n+1)$ 本の方程式があるので解ける．

(8), (9) 式より，

$$\frac{\frac{\partial u_i}{\partial m_i}}{\frac{\partial u_i}{\partial c_i}} = h_i f'(L) \tag{10}$$

が成り立つ．

個人 i の余暇を 1 単位減らして労働を 1 単位増やしたとする．生産量が $h_i f'(L)$ だけ増え，消費可能性フロンティアが拡大する．(10) 式の右辺は，個人 i の労働の限界便益を表している．余暇が 1 単位減るときの厚生損失は，限界代替率 $(\partial u_i/\partial m_i)/(\partial u_i/\partial c_i)$ だけ消費が減ることと等価である．(10) 式の左辺は，消費で測った労働の限界費用を表している．(10) 式は，労働の限界便益と限界費用が一致する水準で，個人 i の労働時間を決めるのが望ましいことを意味している．

2.2 分権化経済

本節では分権化された経済での均衡を導出する．個人は，稼得能力に加え，配当の分け前についても異なると仮定する．

個人 i の最適化問題は，次のように定式化される．

$$\max_{c_i, m_i, l_i} u_i = U(c_i, m_i)$$

subject to

$$w h_i l_i + \theta_i \pi = c_i \tag{11}$$

$$1 = l_i + m_i \tag{2}$$

w は有効労働あたりの賃金率を表す．π は配当総額を表し，θ_i は個人 i の分け前を表す．

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1$$

ラグランジュ関数を，

$$L_i = U(c_i, 1-l_i) + \mu_i\left(w h_i l_i + \theta_i \pi - c_i\right)$$

とおく（μ_i は乗数）．1 階の条件は，

$$\frac{\partial u_i}{\partial c_i} - \mu_i = 0 \tag{12}$$

$$-\frac{\partial u_i}{\partial m_i} + \mu_i w h_i = 0 \tag{13}$$

である．

(11), (12), (13) 式より，個人 i の消費 $c_i = c(wh_i, \theta_i \pi)$，労働供給 $l_i = l(wh_i, \theta_i \pi)$，乗数 $\mu_i = \mu(wh_i, \theta_i \pi)$ が得られる．

代表的企業の利潤は,

$$\pi = f(L) - wL \tag{14}$$

で表せる．利潤最大化の 1 階の条件は,

$$w = f'(L) \tag{15}$$

である．この式から，有効労働に対する需要 $L = L(w)$ が得られる．

労働市場の均衡条件は,

$$L = \sum_{i=1}^{n} h_i l_i \tag{16}$$

である．

財市場の均衡条件

$$f(L) = \sum_{i=1}^{n} c_i \tag{17}$$

は他の式から導出できる．実際，(11), (14), (16) 式より,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} (wh_i l_i + \theta_i \pi) = wL + \pi = f(L)$$

が成り立つ．

$c_i, l_i, \mu_i, w, L, \pi$ の $(3n+3)$ 個の変数について，(11), (12), (13), (14), (15), (16) 式の $(3n+3)$ 本の方程式があるので解ける．

(12), (13), (15) 式より,

$$\frac{\frac{\partial u_i}{\partial m_i}}{\frac{\partial u_i}{\partial c_i}} = h_i f'(L)$$

が成立し，(10) 式と一致する．各個人の労働の最適配分条件は，分権化経済でも成立する．

2.3 比較

本節では 2.1 節の社会的最適と，2.2 節の分権化経済における均衡を比較する．資源制約 (7) 式と財市場均衡条件 (17) 式は同じなので，(8), (9) 式と (12), (13) 式が一致すればよい．(15) 式を用いると，次の命題が成立する．

命題 1 社会厚生における個人 i のウェイト W_i が,

$$W_i = \frac{\lambda}{\mu_i} \tag{18}$$

を満たすとき，分権化経済における均衡は社会的最適に一致する．所得分配も最適である．

前節の最後に述べたように，労働配分については分権化経済において最適である．したがって，消費配分が最適かどうかをチェックすればよい．社会的最適における消費の限界効用は,

$$\frac{\partial u_i}{\partial c_i} = \frac{\lambda}{W_i}$$

である．$\partial^2 u_i / \partial c_i^2 < 0$ であるから，個人 i のウェイト W_i が大きいほど，消費 c_i が大きいことを意味する．

他方，分権化経済における消費の限界効用は,

$$\frac{\partial u_i}{\partial c_i} = \mu_i$$

である．したがって，(18) 式が成立するとき，分権化経済における消費配分が最適になる．

一般的に，社会厚生における個人 i のウェイト W_i はモデルの外で決まるので，(18) 式が成立するのは稀である[1]．次節ではモデルを特定化して，分権化経済における均衡が社会的最適に一致するケースを説明する．

2.4 特定化

効用関数，生産関数，社会厚生関数を次のように特定化する．

$$
\begin{aligned}
U(c,m) &= \alpha \ln c + (1-\alpha)\ln m \\
f(L) &= L \\
W &= \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i
\end{aligned}
$$

$0 < \alpha < 1$ は消費に対する選好を表す定数である．社会厚生は，個人効用 u_i を $\omega_i > 0$ でウェイトづけした加重和である．

最初に，分権化経済の均衡を導出する．労働の限界生産力が 1 なので，$w = 1, \pi = 0$ である．個人 i の最適化問題は，

$$
\max_{c_i,\, l_i}\ u_i = \alpha \ln c_i + (1-\alpha)\ln(1-l_i)
$$

subject to

$$
h_i l_i = c_i
$$

と定式化される．

ラグランジュ関数を，

$$
L_i = \alpha \ln c_i + (1-\alpha)\ln(1-l_i) + \mu_i(h_i l_i - c_i)
$$

とおく．1 階の条件は，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L_i}{\partial c_i} &= \frac{\alpha}{c_i} - \mu_i = 0 \\
\frac{\partial L_i}{\partial l_i} &= -\frac{1-\alpha}{1-l_i} - \mu_i h_i = 0
\end{aligned}
$$

である．これを解くと，

$$
c_i = \alpha h_i \tag{19}
$$

$$
l_i = \alpha \tag{20}
$$

$$
\mu_i = \frac{1}{h_i} \tag{21}
$$

を得る．

余暇 m_i を用いると，予算制約式は，$h_i = c_i + h_i m_i$ と表せる．稼得能力の高い個人は，左辺の full inome h_i が大きい．余暇は正常財なので，所得効果により，稼得能力が高い個人ほど余暇を増やそうとする．他方，余暇の価格（機会費用）は h_i である．価格効果により稼得能力の高い個人ほど余暇を減らそうとする．対数効用の仮定のもとでは，所得効果と価格効果はちょうど相殺され，余暇需要は h_i と独立になる．

労働供給が一定で配当所得もないので，個人の所得分布は稼得能力の分布に一致する．消費分布も能力分布に一致する．所得の限界効用 μ_i は稼得能力 h_i に反比例する．

次に，社会的最適解を導出する．最適化問題は次のように定式化される．

$$
\max_{c_i,\, l_i} \sum_{i=1}^{n} \omega_i[\alpha \ln c_i + (1-\alpha)\ln(1-l_i)]
$$

[1]完全競争均衡はパレート最適である（厚生経済学の第 1 定理）．しかし，パレート最適は契約曲線上に無数にある．したがって，完全競争均衡が社会的最適に一致する保証はない．

subject to

$$\sum_{i=1}^{n} h_i l_i = \sum_{i=1}^{n} c_i$$

ラグランジュ関数を，

$$L = \sum_{i=1}^{n} \omega_i [\alpha \ln c_i + (1-\alpha) \ln(1-l_i)] + \lambda \sum_{i=1}^{n} (h_i l_i - c_i)$$

とおく．1 階の条件は，

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial c_i} &= \frac{\omega_i \alpha}{c_i} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial l_i} &= -\frac{\omega_i (1-\alpha)}{1-l_i} + \lambda h_i = 0 \end{aligned}$$

である．

まず，c_i, l_i について解く．

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{\omega_i \alpha}{\lambda} \\ l_i &= 1 - \frac{\omega_i (1-\alpha)}{\lambda h_i} \end{aligned}$$

次に，これらを資源制約式に代入する．

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \left[1 - \frac{\omega_i (1-\alpha)}{\lambda h_i} \right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i \alpha}{\lambda}$$

λ について解くと，

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{h}} \tag{22}$$

を得る．ただし，$\bar{\omega} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \omega_i$, $\bar{h} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_i$ は平均を表す．

(22) 式を c_i, l_i の式に代入すると，消費と労働の最適配分が得られる．

$$c_i = \alpha h_i \times \frac{\omega_i / \bar{\omega}}{h_i / \bar{h}} \tag{23}$$

$$l_i = 1 - (1-\alpha) \frac{\omega_i / \bar{\omega}}{h_i / \bar{h}} \tag{24}$$

消費配分は，効用ウェイト ω_i に依存する．ウェイトの大きい個人にはより多くの消費が配分される．労働配分は，効用ウェイト ω_i と稼得能力 h_i に依存する．ω_i が大きい個人は，余暇が尊重されるため労働配分が小さくなる．h_i が大きい個人は労働生産性が高いため労働配分が大きくなる．

(19) 式と (23) 式，(20) 式と (24) 式を比較すると，

$$\frac{\omega_i}{\bar{\omega}} = \frac{h_i}{\bar{h}} \tag{25}$$

が成立する場合に限り，分権化経済の均衡と社会的最適が一致する．実際，$W_i = \omega_i$ であることから，(21), (22), (25) 式から，命題 1 の (18) 式が成立していることが分かる．

(25) 式は，個人の社会的な評価 ω_i が稼得能力 h_i に比例することを意味している．直観的には受け入れにくいかもしれない．しかし，仮に社会が能力主義を尊重し，(25) 式の基準にもとづいて個人を社会的に評価しているとすれば，分権化経済における所得分配は社会的に最適である．

3 Concluding Remarks