最適な国債政策－異時点間の資源再配分－

宮澤和俊*

1 Introduction

災害や戦争，疫病といった外生的ショックが生じたとき，将来の資源を現在の資源に振り替えるという異時点間の資源の再配分が望ましい．国債は，この目的を達成するためのもっとも強力な政策ツールである．本稿では，モデルを用いて最適な国債政策とは何かを説明する．次節では，社会的に最適な資源配分を導出する．3 節ではまず分権化経済における均衡を導出し，次に最適政策を導出する．国債を用いることで，分権化経済における資源配分が社会的最適に一致することが示される．4 節では選好と技術を特定化し，最適な国民負担率を導出する．ショック時の国民負担率は 10% ，ショック後の国民負担率は 40% である．国民負担率の平準化は最適政策ではない．危機のときは負担率を下げ，平常時に負担率を上げるのが望ましい．最後の節はまとめである．

2 社会的最適

2 期モデルを用いる．効用関数を，

$$u = U(c_1, g_1) + \beta U(c_2, g_2) \tag{1}$$

とする．c_i は i 期の私的財消費，g_i は公共財を表す（$i = 1, 2$）．$0 < \beta < 1$ は私的割引要素を表す．時間選好率が大きいほど個人は現在効用を高く評価するため，β の値が小さくなる．

各期の資源制約式は，

$$y_1 = c_1 + g_1 + k \tag{2}$$

$$f(k) = c_2 + g_2 \tag{3}$$

で与えられる．y_1 は 1 期の資源（所与），k は 1 期の投資であり，2 期の資本を表す．$y_2 = f(k)$ は 2 期の生産量を表す．

(2), (3) 式の制約のもとで (1) 式を最大にする配分 (c_1, c_2, g_1, g_2, k) を社会的最適と定義する．

ラグランジュ関数を，

$$L = U(c_1, g_1) + \beta U(c_2, g_2) + \lambda_1(y_1 - c_1 - g_1 - k) + \lambda_2[f(k) - c_2 - g_2]$$

とおく．λ_1, λ_2 はそれぞれ (2), (3) 式の乗数である．

*Faculty of Economics, Doshisha Univeristy, Kamigyo, Kyoto 602-8580 Japan. kazu@mail.doshisha.ac.jp

1 階の条件は,

$$\frac{\partial L}{\partial c_1} = U_c(c_1, g_1) - \lambda_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial g_1} = U_g(c_1, g_1) - \lambda_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial c_2} = \beta U_c(c_2, g_2) - \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial g_2} = \beta U_g(c_2, g_2) - \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial k} = -\lambda_1 + \lambda_2 f'(k) = 0$$

である.

λ_1, λ_2 を消去すると,

$$MRS^1_{cg} = \frac{U_g(c_1, g_1)}{U_c(c_1, g_1)} = 1 \tag{4}$$
$$MRS^2_{cg} = \frac{U_g(c_2, g_2)}{U_c(c_2, g_2)} = 1 \tag{5}$$
$$MRS_{cc} = \frac{U_c(c_1, g_1)}{U_c(c_2, g_2)} = \beta f'(k) \tag{6}$$

を得る.(2), (3), (4), (5), (6) 式の 5 本の方程式から最適配分 (c_1, c_2, g_1, g_2, k) が求められる.

(4), (5) 式はそれぞれ,1 期,2 期の公共財の最適供給条件を表す.右辺の 1 は公共財の限界費用を表す.左辺の MRS^i_{cg} は公共財 1 単位の価値を私的財で測ったものであり,公共財の限界便益を表す.限界便益と限界費用が一致する水準で公共財を供給するのが望ましいことを意味している.(6) 式は 1 期と 2 期の消費の最適配分条件を表す.現在消費を 1 単位減らし,投資を 1 単位増やしたとする.このとき,将来消費が $f'(k)$ 単位増える.右辺は投資の限界便益の割引現在価値を表している.左辺は,現在消費が 1 単位減ったときの厚生損失を,将来消費で測ったものであり,投資の限界費用を表している.投資についても限界便益と限界費用が一致する水準が望ましいことを意味している.

3 分権化経済

本節では分権化経済における均衡と最適政策を導出する.家計は価格および各期の公共財 (g_1, g_2) を所与として,消費と貯蓄の配分を決める.企業は要素価格を所与として投入要素の水準を決める.利潤は配当として家計に分配される.閉鎖経済での完全競争市場において価格が決まる.政府は,市場メカニズムを理解してうえで,国債と税を用いて公共財の供給量を決定する.

3.1 家計

人口サイズを 1 とする.個人の効用関数は (1) 式で与えられる.各期の予算制約式は,

$$y_1 = c_1 + s \tag{7}$$
$$Rs + \pi - T = c_2 \tag{8}$$

で与えられる.s は貯蓄を表す.R は利子率,π は配当,T は一括税を表す.

個人の最適化問題は次式で定義される.

$$\max_{c_1, c_2} u = U(c_1, g_1) + \beta U(c_2, g_2)$$

subject to

$$y_1 + \frac{\pi - T}{R} = c_1 + \frac{c_2}{R} \tag{9}$$

(9) 式は，(7), (8) 式で s を消去した式であり，生涯の予算制約式を意味する．

1 階の条件は,

$$\frac{U_c(c_1, g_1)}{U_c(c_2, g_2)} = \beta R \tag{10}$$

である．(9), (10) 式より消費需要 c_1^*, c_2^* が求められる．さらに，(7) 式あるいは (8) 式より貯蓄 s^* が求められる．

3.2 企業

2 期の企業は，資本を用いて財を生産する．生産関数を $y_2 = f(k)$ とする．y_2 は生産量，k は資本投入を表す.

企業の最適化問題は次式で定義される.

$$\max_k \pi = f(k) - Rk \tag{11}$$

ただし，R は利子率，π は利潤である．1 階の条件は,

$$R = f'(k) \tag{12}$$

である．(12) 式より資本需要 k^* が求められる．個人に支払われる配当は，$\pi^* = f(k^*) - Rk^*$ である．

3.3 政府と市場均衡

政府は 1 期の公共財の費用を賄うために国債を発行する．2 期には公共財の供給費用と国債償還費を賄うために一括税を徴収する．各期の政府の予算制約式は,

$$b = g_1 \tag{13}$$

$$T = g_2 + Rb \tag{14}$$

で与えられる．b は 1 期の国債発行額を表し，T は 2 期の税収を表す.

資本市場の均衡条件は,

$$s = k + b \tag{15}$$

で与えられる．左辺は家計の貯蓄（資本供給）を表し，右辺は企業と政府の資本需要を表す.

各期の財市場の均衡条件は,

$$y_1 = c_1 + g_1 + k \tag{16}$$

$$y_2 = c_2 + g_2 \tag{17}$$

で与えられる.

ワルラス法則より，(16), (17) 式は他の式から導出できる．実際，(7), (13), (15) 式より,

$$\begin{aligned} c_1 + g_1 + k &= (y_1 - s) + b + k \\ &= y_1 \end{aligned}$$

が成り立つ．また，(8), (14), (15) 式および (11) 式より,

$$\begin{aligned} c_2 + g_2 &= (Rs + \pi - T) + (T - Rb) \\ &= \pi + Rk \\ &= y_2 \end{aligned}$$

が成り立つ.

3.4　均衡

公共財の供給水準 (g_1, g_2) を所与とする．分権化経済における均衡は，次の 8 本の方程式で記述できる．

$$y_1 = c_1 + s \tag{7}$$

$$Rs + \pi - T = c_2 \tag{8}$$

$$\frac{U_c(c_1, g_1)}{U_c(c_2, g_2)} = \beta R \tag{10}$$

$$\pi = f(k) - Rk \tag{11}$$

$$R = f'(k) \tag{12}$$

$$b = g_1 \tag{13}$$

$$T = g_2 + Rb \tag{14}$$

$$s = k + b \tag{15}$$

内生変数は，$c_1, c_2, s, R, \pi, T, k, b$ の 8 つである．連立方程式を解くことにより，内生変数は (g_1, g_2) の関数として表すことができる．

政府の目的関数を，

$$V = U(c_1^*, g_1) + \beta U(c_2^*, g_2) \tag{18}$$

とする．ただし，c_1^*, c_2^* は分権化経済における消費を表し，(g_1, g_2) の関数である点に注意する．

政府にとって必要な方程式を注意深く選別すると，(c_1^*, c_2^*, k^*) に関する 3 本の方程式

$$y_1 = c_1^* + g_1 + k^* \tag{19}$$

$$f(k^*) = c_2^* + g_2 \tag{20}$$

$$\frac{U_c(c_1^*, g_1)}{U_c(c_2^*, g_2)} = \beta f'(k^*) \tag{21}$$

を利用すれば十分であることが分かる．

政府の最適化問題は，次式で定式化される．

$$\max_{g_1,\, g_2} V = U(y_1 - g_1 - k^*, g_1) + \beta U(f(k^*) - g_2, g_2)$$

ただし，$k^* = k(g_1, g_2)$ は (19), (20), (21) 式から与えられる．

分権化経済における公共財の最適水準を求める．まず，V を g_1 で微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial g_1} &= U_c^1 \left(-1 - \frac{\partial k^*}{\partial g_1}\right) + U_g^1 + \beta U_c^2 f'(k^*) \frac{\partial k^*}{\partial g_1} \\ &= U_g^1 - U_g^1\end{aligned}$$

を得る．2 番目の等号は，(21) 式を用いている．したがって，1 期の公共財の最適水準は，

$$MRS_{cg}^1 = \frac{U_g^1}{U_c^1} = 1 \tag{22}$$

で与えられる．

次に，V を g_2 で微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial g_2} &= U_c^1 \left(-\frac{\partial k^*}{\partial g_2}\right) + \beta \left[U_c^2 \left(f'(k^*) \frac{\partial k^*}{\partial g_1} - 1\right) + U_g^2\right] \\ &= \beta \left(U_g^2 - U_c^2\right)\end{aligned}$$

を得る．上と同様に，(21) 式を用いる．2 期の公共財の最適水準は，

$$MRS_{cg}^2 = \frac{U_g^2}{U_c^2} = 1 \tag{23}$$

で与えられる．

以上から，分権化経済における最適配分 $(c_1^*, c_2^*, k^*, g_1^*, g_2^*)$ は，(19), (20), (21), (22), (23) 式の 5 本の方程式で記述できる．

最後に，分権化経済における最適配分と 2 節の社会的に最適な配分を比較する．(19), (20), (21), (22), (23) 式の 5 本の方程式は，(2), (3), (4), (5), (6) 式の 5 本の方程式に一致する．したがって，分権化経済における最適配分は社会的に最適な配分に一致する．政府の最適政策とは，公共財の供給水準を (g_1^*, g_2^*) に定め，1 期に国債 $b = g_1^*$ を発行し，2 期に一括税 $T^* = g_2^* + R^* g_1^*$ を徴収することである．

4 数値例

効用関数と生産関数を特定化して，国債の規模を分析する．関数を，

$$U(c, g) = (1-\alpha)\ln c + \alpha \ln g$$
$$f(k) = Ak$$

とする．$0 < \alpha < 1$ は公共財の選好ウェイトを表す定数，$A > 0$ は資本生産性を表す定数である．

k を所与とすると，2 期の最適配分は，

$$\max_{c_2,\, g_2} (1-\alpha)\ln c_2 + \alpha \ln g_2 \quad \text{subject to} \quad Ak = c_2 + g_2$$

の解である．これを解くと，

$$c_2^* = (1-\alpha)Ak$$
$$g_2^* = \alpha Ak$$

を得る．2 期の効用は，

$$u_2^* = (1-\alpha)\ln c_2^* + \alpha \ln g_2^* = \ln k + \ln A + (1-\alpha)\ln(1-\alpha) + \alpha \ln \alpha$$

である．

1 期の最適配分は，

$$\max_{c_1,\, g_1,\, k} (1-\alpha)\ln c_1 + \alpha \ln g_1 + \beta u_2^* \quad \text{subject to} \quad y_1 = c_1 + g_1 + k$$

の解である．これを解くと，

$$c_1^* = \frac{1-\alpha}{1+\beta} y_1$$
$$g_1^* = \frac{\alpha}{1+\beta} y_1$$
$$k^* = \frac{\beta}{1+\beta} y_1$$

を得る．k^* の式を c_2^*, g_2^* の式に代入すると，

$$c_2^* = \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha)Ay_1$$
$$g_2^* = \frac{\beta}{1+\beta}\alpha Ay_1$$

を得る．

(13) 式より，1 期の潜在的国民負担率（財政赤字を含む国民負担率）は，

$$\frac{b^*}{y_1} = \frac{\alpha}{1+\beta}$$

である．負担率が高いのは，公共財への選好 α が大きく，割引要素 β が小さいときである．

利子率が $R^* = A$ であることから，(14) 式より，

$$T^* = g_2^* + R^* b^* = \alpha A y_1$$

が成り立つ．2 期の国民負担率は，

$$\frac{T^*}{Ak^*} = \frac{\alpha(1+\beta)}{\beta}$$

である．国民負担率が高いのは，α が大きく β が小さいときである．

消費支出に占める公的支出の割合を 20% とする（$\alpha = 0.2$）．1 期 10 年とし，時間選好率を年 1% とすると，$\beta = 1.01^{-10} = 0.905$ である．政府は，償還期間 10 年の国債を用いて政策をおこなうとする．このとき，1 期の潜在的国民負担率は，$\alpha/(1+\beta) = 10.5\%$，2 期の国民負担率は，$\alpha(1+\beta)/\beta = 42\%$ である．何らかの理由で税収が見込めないとき，国債を用いて短期的に国民負担率を下げる政策が望ましい．

5 Concluding Remarks