

# ロジスティック関数とオッズ

宮澤和俊\*

大学院「家族の経済学」の補足

Doepke and Zilibotti (2019) では, multivariate logistic regression とか, odds ratio といった計量経済学の専門用語が出てくる. 細かい分析手法は他に譲るとして, ここでは背後にある考え方について説明する.

先生: 次のような関数をステップ関数といいます.

太郎: 唐突だね.

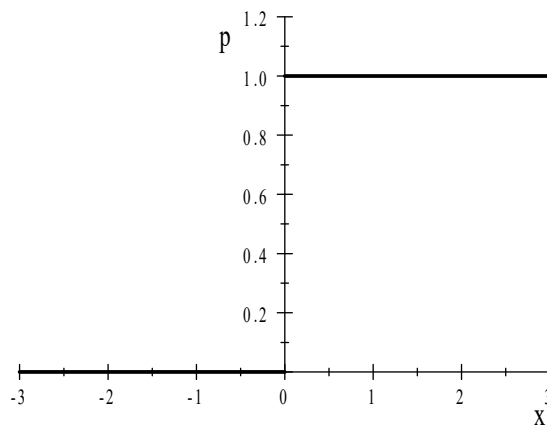
花子: 黙って聞く.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

先生: 図にするとこんな感じです. まさにステップ.

太郎: たしかに.

図 1. ステップ関数のグラフ



先生: タテ軸を  $p$  にしたのは意味があります. 勝ったら 1, 負けたら 0 だとしましょう.  $p$  は勝つ確率 (probability) だと考えてください. 試験に合格, 不合格でもいいです.

太郎: すぐ試験とかいうのが, 先生の悪い癖.

先生: ヨコ軸の  $x$  は, 勝敗の要因となる何かを表します. 野球でいうと, 太ももの太さでしょうか. 太ももの太さを,  $(60 + x)$  センチとします. 図は, 60 センチ以上だと勝ち, 60 センチ未満だと負けることを表しています.

花子: 先生, 例が分かりにくいです.

太郎: 坂本は太もも細いよね.

先生: 太郎くんは巨人ファンですか. その通り. 太ももは重要ですが, 太ももだけでは勝敗は決まりません. ステップ関数は分かりやすいですが, ちょっと極端だと言いたかったのです.

花子: そんなに太ももって重要?

\*Faculty of Economics, Doshisha University, Kamigyo, Kyoto 602-8580 Japan. kazu@mail.doshisha.ac.jp

先生：はい，重要です．私が保証します．ところで，次の関数をロジスティック関数といいます．

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-\beta x}} \quad (\beta > 0 \text{ は定数}) \quad (1)$$

太郎：唐突！

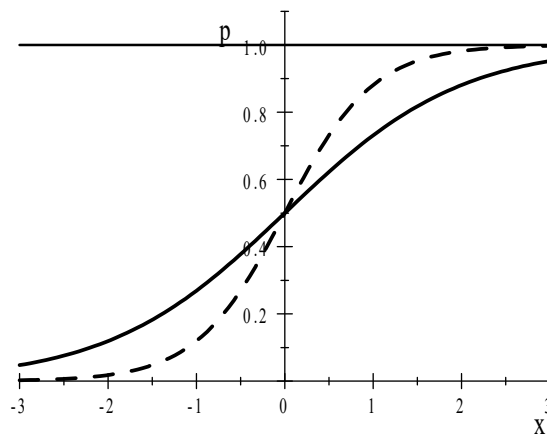
花子：指数関数？

先生：はい，分母の  $e^{-\beta x}$  は指数関数です． $e \doteq 2.718$  は自然対数の底と呼ばれる数です．図を描くとこのようになります．実線が  $\beta = 1$  のケース，破線が  $\beta = 2$  のケースです．

太郎：右上がりだね．

花子：点対称？

図 2. ロジスティック関数のグラフ



実線 ( $\beta = 1$ ), 破線 ( $\beta = 2$ )

先生：花子さん，鋭いですね．点  $(0, 0.5)$  に関して対称です．数学的には， $f(x) - 0.5 = -[f(-x) - 0.5]$  が成立します．

花子：難しそうだけど，まあいいか．

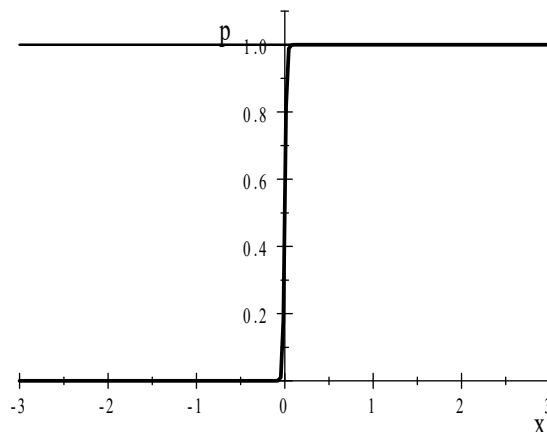
先生： $\beta$  の値が大きくなると， $p$  切片での曲線の傾きが急になります． $\beta$  がとても大きいとどうなると思いますか？

太郎：ステップ関数になる？!

先生：正解！図 3 は， $\beta = 100$  のときのグラフです．ロジスティック関数を使うと，太もも理論を一般化できます．

花子：太もも理論...

図 3. ロジスティック関数のグラフ ( $\beta = 100$ )



先生： $p$  は勝つ確率でした。負ける確率は  $(1-p)$  です。この比、

$$\frac{p}{1-p} \quad (2)$$

をオッズ (odds) といいます。勝率.600 の東京ヤクルトスワローズのオッズは、 $0.6/0.4 = 1.5$  です。このままいけば、セ・リーグ優勝です。2年連続日本一も夢ではありません。ファンの皆さん、優勝おめでとうございます！  
(太郎、花子) 先生はスワローズファンなのかな。

先生：(1) 式のロジスティック関数を用いて、オッズを計算してみます。

$$\frac{p}{1-p} = \frac{\frac{1}{1+e^{-\beta x}}}{1 - \frac{1}{1+e^{-\beta x}}} = \frac{1}{e^{-\beta x}} = e^{\beta x}$$

(太郎、花子) ...

先生：次に、この式を  $x$  で微分して、 $x = 0$  を代入します。微分係数といいます。

$$\left(\frac{p}{1-p}\right)' = \beta e^{\beta x} \Rightarrow \left(\frac{p}{1-p}\right)'_{x=0} = \beta \quad (3)$$

(太郎、花子) ...

先生：太もも理論を用いて説明しましょう。 $x = 0$  とは、太ももが 60 センチの選手を指します。微分係数は、太ももが少しだけ太くなったとき、オッズがどのくらい増えるのかを意味します。つまり、太もも 60 センチの選手が走り込んで太ももを 1 ミリ太くしたとき、勝率がどのくらい上がるのかを意味します。(3) 式から、オッズでみて、 $\beta$  だけ勝率が上がります。太もも理論では、 $\beta$  の大きさがとても重要なのです。

(太郎、花子) 先生、ちょっと興奮気味だね。

先生：最後に統計の話をしてします。勝ち負けのデータ  $p_i$  と、チームの選手の太ももの太さの平均  $(60 + x_i)$  のデータを集めます。 $p_i$  は勝てば 1、負ければ 0 です。次に、

$$p_i = \frac{1}{1 + e^{-\beta x_i}}$$

という関係を仮定して、データに最もフィットするような  $\beta$  の値を求めます。統計ソフトを使えば、簡単に求めることができます。大切なのは解釈です。はい、太郎くん。 $\beta$  は何を意味していましたか？

太郎：えーと... 太もも 60 センチの村上宗隆が、あと 1 ミリ太ももを太くすると、スワローズのオッズが  $\beta$  だけ増えるという意味です。

先生：パーフェクト！単位は保証します。太郎くん。

花子：すぐ単位とかいうのが、先生の悪い癖。

Doepke M, Zilibotti F. (2019) Love, money, and parenting: How Economics explains the way we raise our kids. Princeton University Press.