資源制約のもとでの売上最大化問題
−線形計画法−

宮澤和俊*

経済学の面白さの 1 つは，経済問題を数理的に分析し，解決策を見つけることである．まず，次の問題を解いてみよう．

問題 1.

実数 x, y が次の 4 つの条件を満たすとする．

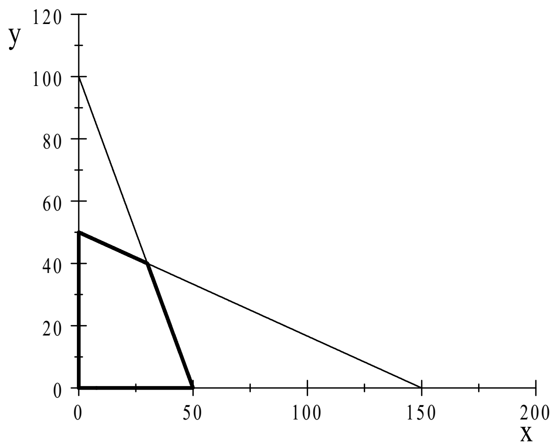
$$\begin{cases} 10x + 30y \leq 1500 \\ 20x + 10y \leq 1000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

このとき，$100x + 200y$ を最大にする (x, y) を求めよ．

解答

平面 (x, y) 上に (1) の 4 本の不等式で表される領域を図示する（図 1）．四角形の内部および周上の点が条件を満たす．第 1 象限内の頂点は $(40, 30)$ である．

図 1. 不等式で表される領域



次に，$100x + 200y = k$ とおく．$y = -\frac{1}{2}x + \frac{k}{200}$ は，傾き $-\frac{1}{2}$，y 切片 $\frac{k}{200}$ の直線を表す．$100x + 200y$ の値がちょうど k となるような点 (x, y) の軌跡を意味する．この直線が四角形の領域を通るように動かすとき，y 切片が最大となるのは，点 $(40, 30)$ を通るときである．したがって，解は，$(x, y) = (40, 30)$．$\cdots$(答)

次に，以下のような経済問題を考えよう．

*Faculty of Economics, Doshisha Univeristy, Kamigyo, Kyoto 602-8580 Japan. kazu@mail.doshisha.ac.jp

問題 2.

労働と資本を用いて，鉛筆とリンゴを生産する．鉛筆を 1 単位生産するには，労働 10 単位，資本 20 単位が必要である．リンゴを 1 単位生産するには，労働 30 単位，資本 10 単位が必要である．労働は全部で 1500 単位，資本は全部で 1000 単位あるとする．

(1) 鉛筆の生産量を x，リンゴの生産量を y とする．鉛筆の価格が $P_x = 100$ 円，リンゴの価格が $P_y = 200$ 円であるとき，売上を最大にする (x, y) を求めよ．

(2) ある企業が労働と資本のすべてを所有しており，売上が最大となるように生産計画を立てるとする．この企業が，鉛筆もリンゴもともに生産するための価格 P_x, P_y の条件を求めよ．

文章題はややこしいので，1 つ 1 つ見ていきましょう．

労働と資本を用いて，鉛筆とリンゴを生産する

生産に使われる資源を，投入要素 (input) といいます．労働と資本が投入要素です．資本とは何か．難しい問題ですが，とりあえず機械とか軽トラとか，労働以外の生産要素をイメージします．生産されたものを生産物とか産出 (output) といいます．鉛筆とリンゴが生産物です．2-input, 2-output の生産モデルを考えようという意味です．

鉛筆を 1 単位生産するには，労働 10 単位，資本 20 単位が必要である
リンゴを 1 単位生産するには，労働 30 単位，資本 10 単位が必要である

生産技術を特定化しています．表 1 のように整理しておくとすっきりします．経済学では，1 単位という言葉をよく使います．1 単位とは何か．難しい問題ですが，鉛筆なら 1 本とかリンゴなら 1 個とか適当に考えましょう．

表 1. 生産技術

	労働	資本
鉛筆 1 単位	10	20
リンゴ 1 単位	30	10

鉛筆とリンゴを単純に比較すると，鉛筆は相対的に資本をより多く使っています．技術が資本集約的であるといいます．リンゴの生産技術は労働集約的です．

労働は全部で 1500 単位，資本は全部で 1000 単位あるとする

生産に使われる資源に上限を設けています．資源制約といいます．「限りある資源を大切に」「もったいない」こそ経済学です．

以上で，設問の意味が大体分かりました．次に，問題を見ていきます．

鉛筆の生産量を x，リンゴの生産量を y とする

文章題を解くときの定番ですね．何を x, y とおくのか．難しい問題ですが，とりあえず素直に誘導にしたがいましょう．売上は，$100x + 200y$ で与えられます．

次に，資源制約を数式で表します．表 1 を一般化したのが表 2 です．

表 2. 資源制約

	労働	資本
鉛筆 x 単位	$10x$	$20x$
リンゴ y 単位	$30y$	$10y$
	1500	1000

4 行目の 1500 は労働の総量，1000 は資本の総量を表しています．

表 2 から，資源制約は，

$$10x + 30y \leq 1500 \tag{2}$$
$$20x + 10y \leq 1000 \tag{3}$$

と表すことができます．(2) 式は労働に関する制約条件，(3) 式は資本に関する制約条件を意味します．

まとめると，**問題 2 (1)** は，次のように「定式化」することができます．

$$\max_{x\geq 0,\, y\geq 0} R = 100x + 200y \quad \text{subject to} \quad \begin{cases} 10x + 30y \leq 1500 \\ 20x + 10y \leq 1000 \end{cases}$$

R は，売上 (revenue) を表します．subject to は,「〜の制約のもとで」という意味です．$\max_{x\geq 0,\, y\geq 0}$ は，$x \geq 0$, $y \geq 0$ の範囲で x, y をコントロールして最大化せよという意味です．

上で定式化された問題は，**問題 1** そのものなので，$(x^*, y^*) = (40, 30)$ が求める解になります．上付きの* は，解であることを表しています．表 1 のような線形の技術を仮定し，最適な生産計画（ここでは売上が最大となる生産計画）を考える手法を，線形計画法といいます．

最後に，**問題 2 (2)** を解いてみましょう．P_x, P_y といった記号が出てくるので，難易度が上がりました．売上は，$R = P_x x + P_y y$ と表されます．**問題 1** と同じように考えると， $y = -\frac{P_x}{P_y}x + \frac{R}{P_y}$ は，傾きが $-\frac{P_x}{P_y}$，y 切片が $\frac{R}{P_y}$ の直線を表します．この直線が四角形の領域を通るように動かすとき，売上 R が最大となるのは，原点以外の 3 つの頂点 $(x, y) = (40, 30), (50, 0), (0, 50)$ のいずれか（あるいは辺上）であることが図から分かります．どの点が解になるのかは，傾き $-\frac{P_x}{P_y}$ に依存します．点 $(40, 30)$（あるいは辺上）が解になるのは，

$$-2 \leq -\frac{P_x}{P_y} \leq -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \leq \frac{P_x}{P_y} \leq 2 \tag{5}$$

のときです．

$\frac{P_x}{P_y}$ を，鉛筆の相対価格といいます．リンゴで測った鉛筆の価値を意味しています．**問題 1** では，$P_x = 100, P_y = 200$ でした．$\frac{P_x}{P_y} = 0.5$ は，鉛筆 1 単位がリンゴ 0.5 単位分の市場価値があることを意味しています．

鉛筆の相対価格が 2 を超えると，$(50, 0)$ が解になります．鉛筆の生産に特化するといいます．鉛筆の相対価格が $\frac{1}{3}$ を下回ると，リンゴの生産に特化し，$(0, 50)$ が解になります．(5) の範囲では，鉛筆もリンゴも生産するケースが出てきます．このようなケースを，不完全特化といいます．

2 つの問題を使って，数学の問題と経済学の問題を比べてみました．**問題 1** のクリアさこそ，数学の醍醐味です．それに比べて，**問題 2** の難解さと言ったら．しかも，解説を加えれば加えるほど，混迷度が増していきます．

経済学の醍醐味とは何か．難しいですが，**問題 2** よりもさらに混沌とした経済問題がある．頑張って，**問題 2** のように還元する．さらに，**問題 1** のように還元して，解決策を見つけ出す，ではないかと思います．物事を複雑にするのは誰にでもできます．物事をすっきりできるように頭を使ってください．