第 2 種ボルテラ積分方程式
− Cai and Heathcote (2022) の大学分布 −

宮澤和俊*

1 第 2 種ボルテラ積分方程式

関数 $\phi(x)$ に関する方程式

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,y)\phi(y)dy \tag{1}$$

を，第 2 種ボルテラ積分方程式という．$K(x,y)$ を核 (kernel) という．

(1) 式の解は，

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^x G(x,y)f(y)dy \tag{2}$$

で与えられる．ただし，

$$G(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{K}^n(x,y) \tag{3}$$

であり，$\hat{K}^n(x,y)$ は次のように逐次的に定義される．

$$\hat{K}^1(x,y) = K(x,y) \tag{4.1}$$

$$\hat{K}^{n+1}(x,y) = \int_y^x K(x,\tau)\hat{K}^n(\tau,y)d\tau \tag{4.2}$$

(4.1), (4.2) 式から，$\hat{K}^n(x,y)$ を求めることもできる．まず，

$$\begin{aligned}\hat{K}^2(x,y) &= \int_y^x K(x,\tau)\hat{K}^1(\tau,y)d\tau \\ &= \int_y^x K(x,\tau)K(\tau,y)d\tau\end{aligned}$$

次に，

$$\begin{aligned}\hat{K}^3(x,y) &= \int_y^x K(x,\tau)\hat{K}^2(\tau,y)d\tau \\ &= \int_y^x K(x,\tau_1)\left(\int_y^{\tau_1} K(\tau_1,\tau_2)K(\tau_2,y)d\tau_2\right)d\tau_1 \\ &= \int_y^x d\tau_1 \int_y^{\tau_1} d\tau_2 K(x,\tau_1)K(\tau_1,\tau_2)K(\tau_2,y)\end{aligned}$$

以下，同様にして，$\hat{K}^n(x,y)$ は，

$$\hat{K}^n(x,y) = \int_y^x d\tau_1 \int_y^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_y^{\tau_{n-2}} d\tau_{n-1} K(x,\tau_1)K(\tau_1,\tau_2)\cdots K(\tau_{n-2},\tau_{n-1})K(\tau_{n-1},y) \tag{5}$$

と表すことができる．

*Faculty of Economics, Doshisha Univeristy, Kamigyo, Kyoto 602-8580 Japan. kazu@mail.doshisha.ac.jp

2 Cai and Heathcote (2022)

本節では，Cai and Heathcote (2022) のモデルに登場する，第 2 種ボルテラ積分方程式の解を具体的に導出する．Cai and Heathcote (2022) の大学分布 $\chi(q)$ は次式で与えられる．なお，$q \in [a_l, a_h]$ は，大学が提供する教育の質を表している．

$$\chi(q) = \frac{2\chi(a_h)(a_h - a_l)}{(a_h - q)^2 + (q - a_l)^2} + \frac{-2}{(a_h - q)^2 + (q - a_l)^2} \int_{a_h}^{q} (2x - a_h - a_l)\chi(x)dx \tag{6}$$

$\chi(a_h)$ が定数である点に注意すると，(6) 式は第 2 種ボルテラ積分方程式であることが分かる．核は，

$$K(q, x) = \frac{-2(2x - a_h - a_l)}{(a_h - q)^2 + (q - a_l)^2} \tag{7}$$

である．

(2) 式より，(6) 式の解は，

$$\chi(q) = f(q) + \int_{a_h}^{q} G(q, x)f(x)dx \tag{8}$$

で与えられる．ただし，

$$\begin{aligned}
f(q) &= \frac{2\chi(a_h)(a_h - a_l)}{(a_h - q)^2 + (q - a_l)^2} \\
G(q, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{K}^n(q, x)
\end{aligned}$$

である．

以下，$\hat{K}^n(q, x)$ を求めよう．

まず，

$$\hat{K}^1(q, x) = K(q, x) = \frac{-2(2x - a_h - a_l)}{(a_h - q)^2 + (q - a_l)^2} \tag{9}$$

次に，

$$\begin{aligned}
\hat{K}^2(q, x) &= \int_{x}^{q} K(q, \tau)K(\tau, x)d\tau \\
&= \int_{x}^{q} \frac{-2(2\tau - a_h - a_l)}{(a_h - q)^2 + (q - a_l)^2} \frac{-2(2x - a_h - a_l)}{(a_h - \tau)^2 + (\tau - a_l)^2} d\tau \\
&= \frac{4(2x - a_h - a_l)}{(a_h - q)^2 + (q - a_l)^2} \int_{x}^{q} \frac{2\tau - a_h - a_l}{(a_h - \tau)^2 + (\tau - a_l)^2} d\tau
\end{aligned}$$

ここで，

$$\left(\ln[(a_h - \tau)^2 + (\tau - a_l)^2]\right)' = \frac{2(2\tau - a_h - a_l)}{(a_h - \tau)^2 + (\tau - a_l)^2}$$

であることから，

$$\begin{aligned}
\int_{x}^{q} \frac{2\tau - a_h - a_l}{(a_h - \tau)^2 + (\tau - a_l)^2} d\tau &= \frac{1}{2} \left[\ln[(a_h - \tau)^2 + (\tau - a_l)^2]\right]_{\tau=x}^{q} \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{(a_h - q)^2 + (q - a_l)^2}{(a_h - x)^2 + (x - a_l)^2}
\end{aligned}$$

を得る．したがって，

$$\hat{K}^2(q, x) = \frac{2(2x - a_h - a_l)}{(a_h - q)^2 + (q - a_l)^2} \ln \frac{(a_h - q)^2 + (q - a_l)^2}{(a_h - x)^2 + (x - a_l)^2}$$

である．

以下では便宜上，

$$z(q) = \ln\left[(a_h - q)^2 + (q - a_l)^2\right] \tag{10}$$

を用いる．(10) 式を用いると，上の式は，

$$\hat{K}^2(q, x) = \frac{2(2x - a_h - a_l)}{(a_h - q)^2 + (q - a_l)^2}\left[z(q) - z(x)\right] \tag{11}$$

と表すことができる．

さらに，$\hat{K}^3(q, x)$ を求めよう．

$$\begin{aligned}
\hat{K}^3(q, x) &= \int_x^q K(q, \tau)\hat{K}^2(\tau, x) d\tau \\
&= \int_x^q \frac{-2(2\tau - a_h - a_l)}{(a_h - q)^2 + (q - a_l)^2} \frac{2(2x - a_h - a_l)}{(a_h - \tau)^2 + (\tau - a_l)^2}\left[z(\tau) - z(x)\right] d\tau \\
&= \frac{-4(2x - a_h - a_l)}{(a_h - q)^2 + (q - a_l)^2} \int_x^q \frac{2\tau - a_h - a_l}{(a_h - \tau)^2 + (q - a_l)^2}\left[z(\tau) - z(x)\right] d\tau
\end{aligned}$$

置換積分法を用いる．$z = z(\tau)$ とおく．全微分すると，

$$dz = z'(\tau) d\tau = \frac{2(2\tau - a_h - a_l)}{(a_h - \tau)^2 + (q - a_l)^2} d\tau$$

である．積分区間は $[z(x), z(q)]$ である．したがって，

$$\begin{aligned}
&\int_x^q \frac{2\tau - a_h - a_l}{(a_h - \tau)^2 + (q - a_l)^2}[z(\tau) - z(x)] d\tau \\
&= \int_{z(x)}^{z(q)} [z - z(x)] \cdot \frac{1}{2} dz \\
&= \frac{1}{4}[z(q) - z(x)]^2
\end{aligned}$$

を得る．したがって，

$$\hat{K}^3(q, x) = \frac{-(2x - a_h - a_l)}{(a_h - q)^2 + (q - a_l)^2}\left[z(q) - z(x)\right]^2 \tag{12}$$

念のため，$\hat{K}^4(q, x)$ を求めよう．

$$\begin{aligned}
\hat{K}^4(q, x) &= \int_x^q K(q, \tau)\hat{K}^3(\tau, x) d\tau \\
&= \int_x^q \frac{-2(2\tau - a_h - a_l)}{(a_h - q)^2 + (q - a_l)^2} \frac{-(2x - a_h - a_l)}{(a_h - \tau)^2 + (\tau - a_l)^2}\left[z(\tau) - z(x)\right]^2 d\tau \\
&= \frac{2(2x - a_h - a_l)}{(a_h - q)^2 + (q - a_l)^2} \int_x^q \frac{2\tau - a_h - a_l}{(a_h - \tau)^2 + (\tau - a_l)^2}\left[z(\tau) - z(x)\right]^2 d\tau
\end{aligned}$$

置換積分 $z = z(\tau)$ を用いると，

$$\begin{aligned}
&\int_x^q \frac{2\tau - a_h - a_l}{(a_h - \tau)^2 + (\tau - a_l)^2}\left[z(\tau) - z(x)\right]^2 d\tau \\
&= \int_{z(x)}^{z(q)} \left[z - z(x)\right]^2 \cdot \frac{1}{2} d\tau \\
&= \frac{1}{6}\left[z(q) - z(x)\right]^3
\end{aligned}$$

したがって，

$$\hat{K}^4(q, x) = \frac{2x - a_h - a_l}{(a_h - q)^2 + (q - a_l)^2} \times \frac{1}{3}\left[z(q) - z(x)\right]^3 \tag{13}$$

である．

(9), (11), (12), (13) 式から，$\hat{K}^n(q,x)$ は次のようであると類推できる．

$$\hat{K}^n(q,x) = \frac{-2(2x-a_h-a_l)}{(a_h-q)^2+(q-a_l)^2} \times \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left[z(q)-z(x)\right]^{n-1} \tag{14}$$

数学的帰納法を用いて，(14) 式を証明する．

(I) $n=1$ のとき，(14) 式は成り立つ．

(II) $n=k$ のとき，(14) 式が成立すると仮定する．このとき，定義より，

$$\begin{aligned}
\hat{K}^{k+1}(q,x) &= \int_x^q K(q,\tau)\hat{K}^k(\tau,x)d\tau \\
&= \int_x^q \frac{-2(2\tau-a_h-a_l)}{(a_h-q)^2+(q-a_l)^2}\frac{-2(2x-a_h-a_l)}{(a_h-\tau)^2+(\tau-a_l)^2} \times \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\left[z(\tau)-z(x)\right]^{k-1}d\tau \\
&= \frac{-2(2x-a_h-a_l)}{(a_h-q)^2+(q-a_l)^2} \times \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\int_x^q \frac{-2(2\tau-a_h-a_l)}{(a_h-\tau)^2+(\tau-a_l)^2}\left[z(\tau)-z(x)\right]^{k-1}d\tau
\end{aligned}$$

置換積分 $z=z(\tau)$ を用いると，

$$\begin{aligned}
&\int_x^q \frac{-2(2\tau-a_h-a_l)}{(a_h-\tau)^2+(\tau-a_l)^2}\left[z(\tau)-z(x)\right]^{k-1}d\tau \\
&= \int_{z(x)}^{z(q)} -\left[z-z(x)\right]^{k-1}d\tau \\
&= -\frac{1}{k}\left[z(q)-z(x)\right]^k
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\hat{K}^{k+1}(q,x) &= \frac{-2(2x-a_h-a_l)}{(a_h-q)^2+(q-a_l)^2} \times \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \times \left(-\frac{1}{k}\right)\left[z(q)-z(x)\right]^k \\
&= \frac{-2(2x-a_h-a_l)}{(a_h-q)^2+(q-a_l)^2} \times \frac{(-1)^k}{k!}\left[z(q)-z(x)\right]^k
\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも (14) 式が成立する．

(I), (II) より，数学的帰納法により，すべての自然数 n について (14) 式が成立する．

次に，$\hat{K}^n(q,x)$ の無限和を求める．(14) 式より，

$$\begin{aligned}
G(q,x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\hat{K}^n(q,x) \\
&= \frac{-2(2x-a_h-a_l)}{(a_h-q)^2+(q-a_l)^2}\sum_{n=1}^{\infty} \times \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left[z(q)-z(x)\right]^{n-1}
\end{aligned} \tag{15}$$

ここで，指数関数 $g(x)=e^x$ をテーラー展開すると，

$$e^x = g(0)+g'(0)x+\frac{g''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

を得る．

$x=-[z(q)-z(x)]$ を代入すると，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left[z(q)-z(x)\right]^{n-1} = \exp[-z(q)+z(x)]$$

が成り立つ．

ここで，(10) 式より，

$$\begin{aligned}
\exp z(q) = \exp\{\ln\left[(a_h-q)^2+(q-a_l)^2\right]\} = (a_h-q)^2+(q-a_l)^2 \\
\exp z(x) = \exp\{\ln\left[(a_h-x)^2+(x-a_l)^2\right]\} = (a_h-x)^2+(x-a_l)^2
\end{aligned}$$

であることに注意すると，(15) 式より，

$$G(q,x) = \frac{-2(2x-a_h-a_l)[(a_h-x)^2+(x-a_l)^2]}{[(a_h-q)^2+(q-a_l)^2]^2} \tag{16}$$

が得られる．

(8) 式を用いて，$\chi(q)$ を求めよう．まず，

$$\begin{aligned}
\int_{a_h}^{q} G(q,x)f(x)dx &= \int_{a_h}^{q} \frac{-2(2x-a_h-a_l)[(a_h-x)^2+(x-a_l)^2]}{[(a_h-q)^2+(q-a_l)^2]^2} \frac{2\chi(a_h)(a_h-a_l)}{(a_h-x)^2+(x-a_l)^2} dx \\
&= \frac{-4\chi(a_h)(a_h-a_l)}{[(a_h-q)^2+(q-a_l)^2]^2} \int_{a_h}^{q} (2x-a_h-a_l)dx \\
&= \frac{-4\chi(a_h)(a_h-a_l)}{[(a_h-q)^2+(q-a_l)^2]^2} \left[\frac{1}{2}(x-a_h)^2+\frac{1}{2}(x-a_l)^2\right]_{x=a_h}^{q} \\
&= \frac{-4\chi(a_h)(a_h-a_l)}{[(a_h-q)^2+(q-a_l)^2]^2} \left[\frac{1}{2}(q-a_h)^2+\frac{1}{2}(q-a_l)^2-\frac{1}{2}(a_h-a_l)^2\right] \\
&= \frac{-2\chi(a_h)(a_h-a_l)}{[(a_h-q)^2+(q-a_l)^2]^2} \left[(q-a_h)^2+(q-a_l)^2-(a_h-a_l)^2\right]
\end{aligned}$$

である．この式と $f(q)$ の式を (8) 式に代入すると，

$$\begin{aligned}
\chi(q) &= \frac{2\chi(a_h)(a_h-a_l)}{(a_h-q)^2+(q-a_l)^2} + \frac{-2\chi(a_h)(a_h-a_l)}{[(a_h-q)^2+(q-a_l)^2]^2} \left[(q-a_h)^2+(q-a_l)^2-(a_h-a_l)^2\right] \\
&= \frac{2\chi(a_h)(a_h-a_l)^3}{[(a_h-q)^2+(q-a_l)^2]^2}
\end{aligned} \tag{17}$$

が得られる．(17) 式が (6) 式の解である．

次に，もっとも教育の質の高い大学の数を表す $\chi(a_h)$ を求める．論文の設定より，

$$\chi(a_h) + \int_{a_l}^{a_h} \chi(q)\frac{q-a_l}{a_h-a_l}dq = 1 \tag{18}$$

が成り立つ．(18) 式は，能力の高い個人の需給均衡条件を意味している．

(17) 式を (18) 式に代入すると，

$$\begin{aligned}
\int_{a_l}^{a_h} \frac{2\chi(a_h)(a_h-a_l)^3}{[(a_h-q)^2+(q-a_l)^2]^2}\frac{q-a_l}{a_h-a_l}dq + \chi(a_h) &= 1 \\
\chi(a_h)\left[1+2(a_h-a_l)^2\int_{a_l}^{a_h}\frac{q-a_l}{[(a_h-q)^2+(q-a_l)^2]^2}dq\right] &= 1
\end{aligned} \tag{19}$$

が成り立つ．積分の部分を求めることができれば，$\chi(a_h)$ が一意に決まる．したがって，(17) 式より，$\chi(q)$ が一意に決まる．

変数を変換する．

$$v = \frac{q-a_l}{a_h-a_l}$$

とおく．積分区間は $v \in [0,1]$ である．$dv = dq/(a_h-a_l)$ であって，

$$\frac{q-a_l}{[(a_h-q)^2+(q-a_l)^2]^2} = \frac{(a_h-a_l)v}{(a_h-a_l)^4[(1-v)^2+v^2]^2}$$

であることから，

$$\int_{a_l}^{a_h}\frac{q-a_l}{[(a_h-q)^2+(q-a_l)^2]^2}dq = \frac{1}{(a_h-a_l)^2}\int_0^1\frac{v}{[(1-v)^2+v^2]^2}dv$$

が成り立つ．

この式を用いると，(19) 式は次のように変形できる．

$$\chi(a_h)\left[1+2\int_0^1 \frac{v}{[(1-v)^2+v^2]^2}dv\right]=1 \tag{20}$$

積分部分を計算する．まず，$t=v-1/2$ とおく．積分区間は，$t\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ である．また，

$$(1-v)^2+v^2=\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+\left(\frac{1}{2}+t\right)^2=2t^2+\frac{1}{2}$$

より，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{v}{[(1-v)^2+v^2]^2}dv &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t+\frac{1}{2}}{\left(2t^2+\frac{1}{2}\right)^2}dt\\ &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}}{\left(2t^2+\frac{1}{2}\right)^2}dt\\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\left(2t^2+\frac{1}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

を得る．

次に，

$$t=\frac{1}{2}\tan\theta$$

とおく．積分区間は，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ である．また，

$$dt=\frac{1}{2}(\tan\theta)'d\theta=\frac{1}{2\cos^2\theta}d\theta$$

であって，

$$2t^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1+\tan^2\theta)=\frac{1}{2\cos^2\theta}$$

であることから，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\left(2t^2+\frac{1}{2}\right)^2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{2\cos^2\theta}}{\left[\frac{1}{2\cos^2\theta}\right]^2}d\theta\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\theta)d\theta\\ &= \left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\ &= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

を得る．

この値を (20) 式に代入すると，

$$\chi(a_h)\left[1+2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\right]=1$$

したがって，

$$\chi(a_h)=\frac{1}{2+\frac{\pi}{2}} \tag{21}$$

が得られる．

(21) 式を (17) 式に代入すると，大学の質 q の分布 $\chi(q)$ が得られる．

$$\chi(q)=\frac{2}{2+\frac{\pi}{2}}\frac{(a_h-a_l)^3}{[(a_h-q)^2+(q-a_l)^2]^2} \tag{22}$$

最後に，もっとも教育の質の低い大学の数を表す $\chi(a_l)$ を求める．論文の設定より，

$$\chi(a_l) + \int_{a_l}^{a_h} \chi(x) \frac{a_h - x}{a_h - a_l} dx = 1$$

が成り立つ．この式は，能力の低い個人の需給均衡条件を意味している．

(17) 式を用いると，

$$\begin{aligned}\chi(a_l) &= 1 - \int_{a_l}^{a_h} \frac{2\chi(a_h)(a_h - a_l)^3}{[(a_h - x)^2 + (x - a_l)^2]^2} \frac{a_h - x}{a_h - a_l} dx \\ &= 1 - 2\chi(a_h)(a_h - a_l)^2 \int_{a_l}^{a_h} \frac{a_h - x}{[(a_h - x)^2 + (x - a_l)^2]^2} dx\end{aligned}$$

まず，変数変換 $z = (a_h - x)/(a_h - a_l)$ を用いる．

$$\chi(a_l) = 1 - 2\chi(a_h) \int_0^1 \frac{z}{[(z^2 + (1 - z)^2]^2} dz$$

次に，

$$z = \frac{1}{2}(1 + \tan\theta)$$

を用いて変数を変換すると，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{z}{[(z^2 + (1 - z)^2]^2} dz &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{2}(1 + \tan\theta)}{\left(\frac{1}{2\cos^2\theta}\right)^2} \frac{d\theta}{2\cos^2\theta} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan\theta)\cos^2\theta d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

この値と (22) 式を代入すると，

$$\chi(a_l) = 1 - \frac{2}{2 + \frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2 + \frac{\pi}{2}} \tag{23}$$

を得る．

(21), (22), (23) 式をまとめると，大学分布は次のようになる．

$$\chi(q) = \begin{cases} \frac{1}{2+\frac{\pi}{2}} & q = a_l \\ \frac{2}{2+\frac{\pi}{2}} \frac{(a_h - a_l)^3}{[(a_h - q)^2 + (q - a_l)^2]^2} \quad \text{if} & a_l < q < a_h \\ \frac{1}{2+\frac{\pi}{2}} & q = a_h \end{cases} \tag{24}$$

3 Concluding Remarks

参考文献

[1] Cai Z, Heathcote J. (2022) College tuition and income inequality. *American Economic Review*. 112, 81-121.