Gini index in a two-class economy

指導教員

1　はじめに

2　モデル

Two-class economy $i = H, L$ における所得格差を分析する．格差指標として，ジニ係数を用いる．ジニ係数は,

$$g = \frac{E[|y_i - y_j|]}{2E[y]} \tag{1}$$

で定義される．y_i は所得を，分母の $E[y]$ は経済全体の平均所得を表す．グループ H に属する個人の所得は y_H，グループ L は y_L である（$y_H > y_L$）．各グループの人口を N_H, N_L とし，人口比を

$$s = \frac{N_L}{N_H} \tag{2}$$

とすると，平均所得は,

$$E[y] = \frac{N_H y_H + N_L y_L}{N_H + N_L} = \frac{y_H + s y_L}{1 + s} \tag{3}$$

と表される．

(1) 式の分子は，差の絶対値の平均（平均差）を表す．表 1 は，$N_H = 2, N_L = 3$ のケースを図示したものである．グループ内の所得の差はゼロなので，左上と右下のマスにはゼロが並ぶ．全体で 25 マス，$(y_H - y_L)$ が 12 マスあるので，平均差は,

$$E[|y_i - y_j|] = \frac{12(y_H - y_L)}{25}$$

である．一般的には,

$$E[|y_i - y_j|] = \frac{2N_H N_L (y_H - y_L)}{(N_H + N_L)^2} = \frac{2s(y_H - y_L)}{(1+s)^2} \tag{4}$$

が成り立つ．

表 1. 平均差

	y_H	y_H	y_L	y_L	y_L
y_H	0	0	$y_H - y_L$	$y_H - y_L$	$y_H - y_L$
y_H	0	0	$y_H - y_L$	$y_H - y_L$	$y_H - y_L$
y_L	$y_H - y_L$	$y_H - y_L$	0	0	0
y_L	$y_H - y_L$	$y_H - y_L$	0	0	0
y_L	$y_H - y_L$	$y_H - y_L$	0	0	0

(3), (4) 式を (1) 式に代入する．between-group inequality を，

$$\sigma = \frac{y_L}{y_H} < 1$$

と定義すると，

$$g = \frac{s(y_H - y_L)}{(1+s)(y_H + sy_L)} = \frac{s(1-\sigma)}{(1+s)(1+s\sigma)} \tag{5}$$

が得られる．

(5) 式は，σ の減少関数である．σ の値が小さくなるとき，すなわち，between-group inequality が大きくなるとき，ジニ係数の値は大きくなる．

他方，人口比 s と g の関係は単調ではない．(5) 式を s で微分すると，

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{(1-\sigma)(1-\sigma s^2)}{(1+s)^2(1+s\sigma)^2} \gtreqless 0 \Leftrightarrow s \lesseqgtr \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$$

を得る．ジニ係数が最大となるのは，$s = 1/\sqrt{\sigma}$ のときである．

図 1. 人口比 s とジニ係数 g（$\sigma = 0.16$）

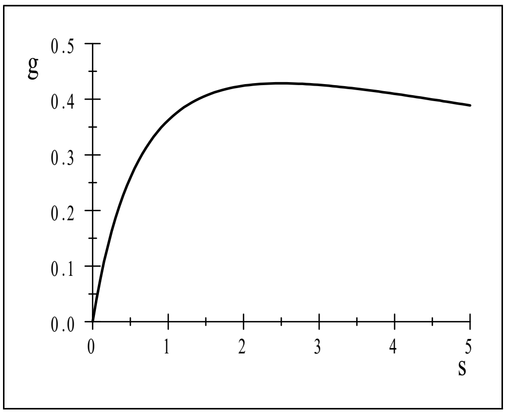


図 1 は，$\sigma = 0.16$ のときの人口比 s とジニ係数 g の関係を図示したものである．ジニ係数が最大となるのは，$s = 1/\sqrt{\sigma} = 2.5$ のときである．最大値は，$(1-\sqrt{\sigma})/(1+\sqrt{\sigma}) = 0.43$ である．低所得グループの人口が増えると，ジニ係数は増加する．しかし，人口比がある値を超えるとジニ係数は低下する．平均所得は減るものの（(3) 式），平均差がそれ以上に減るのがその理由である．

3　数値例

前節の分析結果をまとめると，ジニ係数で測った所得格差は，(i) between-group inequality $\sigma = y_L/y_H$ について減少関数，(ii) 人口比 $s = N_L/N_H$ について最初は増加，その後減少である．本節の目的は，どのような状況で所得要因，人口要因のいずれかが支配的になるのかを調べることである．

最初に，between-group inequality σ が長期的に一定であるケースを考える．(5) 式より，

$$g = \frac{1-\sigma}{\left(1+\frac{1}{s}\right)(1+s\sigma)}$$

である．人口比 s が時間とともに大きくなるケースでは，ジニ係数は長期的にゼロになる．

σ が時間とともに低下する場合，ジニ係数はゼロに収束するとは限らない．分母の交差項

$$s\sigma = \frac{N_L y_L}{N_H y_H} \tag{6}$$

は，各グループの総所得の比率を表す．(6) 式が長期的にゼロになるとき，ジニ係数は 1 に収束する．(6) 式が発散するときはゼロに収束する．

例として，

$$\sigma_t = 0.16 \times a^t \quad (a < 1)$$
$$s_t = 0.1 \times b^t \quad (b > 1)$$

のケースを考える．

図 2 は，$\lim_{t\to\infty} s_t\sigma_t = 0$ のケースを図示したものである（$a = 0.9, b = 1.1$）．1 人あたり所得の格差の拡大が，人口格差の拡大よりも大きいとき，ジニ係数は長期的に 1 に収束する．

図 3 は，$\lim_{t\to\infty} s_t\sigma_t = \infty$ のケースを図示したものである（$a = 0.9, b = 1.2$）．1 人あたり所得の格差が拡大することで，ジニ係数は増加する．しかし，長期的には，人口格差の拡大効果が支配的になり，ジニ係数は減少し，ゼロに収束する．

図 2. ジニ係数の推移（ $a = 0.9, b = 1.1$）

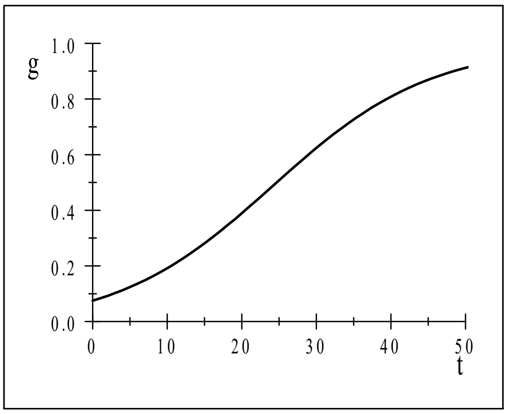
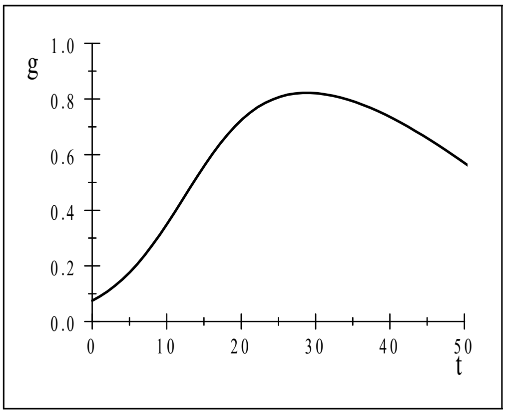


図 3. ジニ係数の推移（ $a = 0.9, b = 1.2$）



4　実証分析

国を 1 つ選び，所得分配と人口のデータを集めてください．s_t, σ_t を推計し，g_t のグラフを書いてください．