Quality-quantity trade-off

宮澤和俊*

EWA「家族の経済学」の補足

Doepke and Zilibotti (2019) の 7 章に出てくる，出生率と 1 人あたり教育支出の間の負の相関 (quality-quantity trade-off) を簡単なモデルを用いて説明する．

1. モデルの設定

親が子どもの数と，子どもの教育水準を決める[1]．

親の効用関数を，

$$u = U(c, n, h) = \log c + \alpha \log n + \beta \log h \tag{1}$$

とする．c は消費，n は子どもの数，h は子どもの**人的資本**を表す[2]．$\alpha > 0$ は，子どもの数への選好の大きさを表す定数，$\beta > 0$ は，子どもの質への選好の大きさを表す定数である．

親は，1 単位の時間を，労働と子育てに配分する．時間制約は，

$$1 = l + \phi n \tag{2}$$

で与えられる．l は労働時間，$\phi > 0$ は子ども 1 人あたりの養育時間を表す定数である．

親は，労働所得を，消費，養育費，教育費に配分する．予算制約は，

$$wl = c + (q + e)n \tag{3}$$

で与えられる．w は賃金率（定数）であり，左辺は労働所得を表す．$q > 0$ は子ども 1 人あたりの養育費（定数）であり，e は親が決める子ども 1 人あたりの教育費である．右辺は家計の総支出を表している．

子どもの人的資本は，親の人的資本と教育で決まる．人的資本形成は，

$$h = h_0 e^{\gamma} \tag{4}$$

で与えられる．h_0 は親の人的資本を表す定数であり．$\gamma > 0$ は，教育効果を表す定数である[3]．

2. 効用最大化問題

(2) 式を (3) 式に代入すると，

$$w = c + (\phi w + q + e)n \tag{5}$$

を得る．

*Faculty of Economics, Doshisha Univeristy, Kamigyo, Kyoto 602-8580 Japan. kazu@mail.doshisha.ac.jp

[1] Becker, G.S. (1993) A Treatise on the Family: Enlarged edition, Harvard University Press.

[2] 人的資本とは，狭義では稼得能力を意味する．

[3] (4) 式から，

$$\frac{e}{h}\frac{dh}{de} = \gamma$$

が成り立つ．γ は人的資本の教育弾力性を表す．教育を 1% 増やすと，人的資本が γ% 増えることを意味する．

右辺の n の係数 $(\phi w+q+e)$ は，子どもの価格を表す．子どもを 1 人追加したときの費用を考えよう．まず，養育時間 ϕ が必要である．その結果，ϕw の労働所得が失われる．**機会費用**という．さらに，養育支出 q，教育支出 e がかかる．これらの 3 つの費用を加えたものが子どもの価格である．

e の係数は子どもの数 n である．子ども 1 人あたりの教育費を $e=2,000$ 万円とする．子どもが 3 人いるときの教育費の総額は 6,000 万円である．e が 100 万円増えると，教育費は 300 万円増える．つまり，教育の限界費用は n である．

(4) 式を (1) 式に代入すると，

$$u=\log c+\alpha\log n+\beta\gamma\log e+\beta\log h_0 \tag{6}$$

を得る．

仮定　子どもの数への選好は，1 人あたり教育支出への選好よりも大きい．

$$\alpha>\beta\gamma \tag{7}$$

親は，(5) 式の予算制約のもとで，(6) 式の効用が最大となるように，消費 c，子どもの数 n，子ども 1 人あたり教育費 e を決定する．親の人的資本 h_0 は所与である．

ラグランジュ関数を，

$$L=\log c+\alpha\log n+\beta\gamma\log e+\beta\log h_0+\lambda[w-c-(\phi w+q+e)n]$$

とおく．λ はラグランジュ乗数である．

最適化の 1 階の条件は，

$$\frac{\partial L}{\partial c}=\frac{1}{c}-\lambda=0 \tag{8}$$
$$\frac{\partial L}{\partial n}=\frac{\alpha}{n}-\lambda(\phi w+q+e)=0 \tag{9}$$
$$\frac{\partial L}{\partial e}=\frac{\beta\gamma}{e}-\lambda n=0 \tag{10}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=w-c-(\phi w+q+e)n=0 \tag{11}$$

である．4 つの変数 c,n,e,λ について 4 本の方程式があるので解ける．

問題 *1*

(8)-(11) 式から，

$$c^*=\frac{w}{1+\alpha} \tag{12}$$
$$n^*=\frac{\alpha-\beta\gamma}{1+\alpha}\frac{w}{\phi w+q} \tag{13}$$
$$e^*=\frac{\beta\gamma}{\alpha-\beta\gamma}(\phi w+q) \tag{14}$$

が得られることを示せ．

3. 比較静学分析

出生率

(13) 式より，

$$\frac{\partial n^*}{\partial w} > 0$$
$$\frac{\partial n^*}{\partial q} < 0$$
$$\frac{\partial n^*}{\partial \phi} < 0$$
$$\frac{\partial n^*}{\partial \gamma} < 0$$

が得られる．出生率が高いのは，(1) 賃金率が高いとき，(2) 養育費が低いとき，(3) 養育の時間コストが低いとき，そして，(4) 教育効果が低いときである．

教育支出

(14) 式より，

$$\frac{\partial e^*}{\partial w} > 0$$
$$\frac{\partial e^*}{\partial q} > 0$$
$$\frac{\partial e^*}{\partial \phi} > 0$$
$$\frac{\partial e^*}{\partial \gamma} > 0$$

が得られる．教育水準が高いのは，(1) 賃金率が高いとき，(2) 養育費が高いとき，(3) 養育の時間コストが高いとき，そして，(4) 教育効果が高いときである．

4. Quality-quanity trade-off

上の比較静学分析の結果から，出生率の低下と 1 人あたり教育費の増加が同時に起こるのは，(1) 養育費 q が増加，(2) 養育の時間コスト ϕ が増加，(3) 教育効果 γ が上昇といった環境変化が生じたときである．

問題 *2*

quality-quantity trade-off を説明するにはどのようなデータを集めればよいか，理論的帰結にもとづいて考えよ．

Doepke M, Zilibotti F. (2019) Love, money, and parenting: How Economics explains the way we raise our kids. Princeton University Press.