

おばあちゃんが孫の育児を手伝います — Dimova and Wolff (2011) の理論モデル —

Kazutoshi Miyazawa*

1 Introduction

Dimova and Wolff (2011) の母娘モデルを紹介する.

2 Model

母 (mother) をリーダー, 娘 (daughter) をフォロワーとする逐次手番ゲームを考える.

(1st state) 母は, 娘の子育てを協力するために, 時間あるいは金銭を移転する.

(2nd stage) 娘は, 母の育児協力を所与として, 労働, 余暇, 育児の時間配分を決める.

シュタッケルベルク均衡を求めるために, 最初に娘の問題を解き, 次に母の問題を解く.

2.1 娘の問題

娘の問題は次のように定式化される.

$$\max_{c_d, l_d, g_d, h_d} v = v(c_d, l_d, g_d + s) \quad (1)$$

subject to

$$w_d h_d + y_d + T = c_d \quad (2)$$

$$h_d + l_d + g_d = 1 \quad (3)$$

下付きの d は娘を表す. 娘は, 消費 c_d , 余暇 l_d , および育児時間 $g_d + s$ から効用を得る. g_d は自分の育児時間, s は母の育児時間を表す. 育児サービスは子の成長を通して子の厚生を改善する. 育児時間の効用は, 子への利他を意味している.

(2) 式は娘の予算制約を表す. w_d は娘の賃金率, h_d は娘の労働時間を表し, $w_d h_d$ は労働所得を表す. y_d は労働以外の所得, T は母からの金銭的移転を表す.

(3) 式は娘の時間制約を表す. 時間賦存を 1 に基準化し, 労働, 余暇, 育児に時間を配分することを意味している.

(2), (3) 式を (1) 式に代入すると, 娘の問題は次のように簡略化される.

$$\max_{l_d, g_d} v = v(w_d(1 - l_d - g_d) + y_d + T, l_d, g_d + s)$$

*Faculty of Economics, Doshisha University, Kamigyo, Kyoto 602-8580 Japan. kazu@mail.doshisha.ac.jp

内点解を仮定すると、余暇 l_d 、育児 g_d に関する 1 階の条件は、それぞれ、

$$v_1 \times (-w_d) + v_2 = 0 \quad (4)$$

$$v_1 \times (-w_d) + v_3 = 0 \quad (5)$$

で与えられる。ただし、 $v_1 = \partial v / \partial c_d$ 、 $v_2 = \partial v / \partial l_d$ 、 $v_3 = \partial v / \partial (g_d + s)$ である。

余暇を 1 単位増やすときの限界便益は v_2 であり、限界費用は $w_d v_1$ である。育児を 1 単位増やすときの限界便益は v_3 であり、限界費用は $w_d v_1$ である。(4), (5) 式はそれぞれ、限界便益と限界費用が一致する水準で余暇と育児を決めることを意味している。

(4), (5) 式より、

$$v_2 = v_3 \quad (6)$$

が成り立つ。余暇の限界費用と育児の限界費用は同じなので、主体的均衡では余暇と育児の限界便益は一致する。

(4), (5) 式より、余暇と育児に関する娘の反応関数 $l_d = l_d(s, T)$ 、 $g_d = g_d(s, T)$ が得られる。さらに (3) 式より、労働供給の反応関数 $h_d = h_d(s, T)$ が得られる。また、(2) 式より消費の反応関数 $c_d(s, T)$ が得られる。これらを (1) 式に代入すると、娘の間接効用関数

$$V(s, T) = v(c_d(s, T), l_d(s, T), g_d(s, T) + s) \quad (7)$$

が得られる。

2.2 母の問題

母の問題は次のように定式化される。

$$\max_{c_m, l_m, h_m, s, T} u = u(c_m, l_m, V(s, T)) \quad (8)$$

subject

$$w_m h_m + y_m = c_m + T \quad (9)$$

$$h_m + l_m + s = 1 \quad (10)$$

下付きの m は母を表す。母は、消費 c_m 、余暇 l_m 、および娘の効用 $V(s, T)$ から効用を得る。(9) 式は母の予算制約を表す。 w_m は母の賃金率、 h_m は母の労働時間を表しており、 $w_m h_m$ は母の労働所得を意味する。 y_m は労働以外の所得である。(9) 式は、所得を自分の消費と娘への金銭的移転に配分することを意味する。(10) 式は母の時間制約である。1 単位の時間を労働、余暇、孫の育児に配分することを意味している。

(9), (10) 式を (8) 式に代入すると、母の問題は次のように簡略化できる。

$$\max_{l_m, s, T} u = u(w_m(1 - l_m - s) + y_m - T, l_m, V(s, T))$$

内点解を仮定すると、余暇 l_m 、孫の育児 s 、金銭的移転 T に関する 1 階の条件は、それぞれ次式で与えられる。

$$u_1 \times (-w_m) + u_2 = 0 \quad (11)$$

$$u_1 \times (-w_m) + u_3 \times V_s = 0 \quad (12)$$

$$-u_1 + u_3 \times V_T = 0 \quad (13)$$

解釈は娘のときと同じである。(11) 式は、余暇の限界便益 u_2 と限界費用 $w_m u_1$ が一致することを意味する。(12) 式は、孫の育児の限界便益 $u_3 V_s$ が限界費用 $w_m u_1$ に一致することを意味する。(13) 式は、金銭的移転の限界便益 $u_3 V_T$ が限界費用 u_1 に一致することを意味する。

(12), (13) 式から,

$$\frac{V_s}{V_T} = w_m \quad (14)$$

が得られる。(14) 式の左辺は、平面 (s, T) における娘の無差別曲線の接線の傾きの絶対値を意味しており、母の育児協力が 1 単位増えるのであれば放棄してもよいと考える金銭的移転額を表す。(14) 式は、均衡において、孫の育児 s の金銭的価値は w_m であることを意味している。

(11), (12), (13) 式を解いて、母の最適な余暇、孫の育児、金銭的移転 (l_m^*, s^*, T^*) が得られる。(9), (10) 式より、労働時間 h_m^* と消費 c_m^* も求められる。これらはすべて賃金率 w_d, w_m と不労所得 y_d, y_m の関数である。

2.3 シュタツケルベルク均衡

2.2 節の分析から、母の育児協力 s^* と金銭的移転 T^* が得られる。

$$\begin{aligned} s^* &= s(w_d, w_m, y_d, y_m) \\ T^* &= T(w_d, w_m, y_d, y_m) \end{aligned}$$

2.1 節の分析から、娘の労働供給 h_d^* が得られる。

$$h_d^* = l_d(s^*, T^*)$$

最後に、母に関するデータ (w_m, y_m, s, T) と娘に関するデータ (w_d, y_d, l_d) を用いると、3つの関数 $s(\cdot), T(\cdot), h_d(\cdot)$ を推計することができる。

3 特定化

効用関数を特定化して、前節の反応関数を具体的に求めてみよう。

娘の効用関数を、

$$v = \alpha \ln c_d + \beta \ln l_d + (1 - \alpha - \beta) \ln(g_d + s) \quad (15)$$

とする。 $\alpha > 0$ は消費のウェイト、 $\beta > 0$ は余暇のウェイト、 $1 - \alpha - \beta$ は育児のウェイトを表す ($\alpha + \beta < 1$)。

(4), (5) 式より、

$$\alpha \frac{w_d}{c_d} = \frac{\beta}{l_d} = \frac{1 - \alpha - \beta}{g_d + s}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} c_d &= \frac{\alpha}{\beta} w_d l_d \\ g_d &= \frac{1 - \alpha - \beta}{\beta} l_d - s \end{aligned}$$

である。これらと (2), (3) 式より、娘の反応関数が得られる。

$$h_d(s, T) = 1 - (1 - \alpha) \left(1 + \frac{y_d + T}{w_d} \right) + \alpha s \quad (16)$$

$$l_d(s, T) = \beta \left(1 + \frac{y_d + T}{w_d} \right) + \beta s \quad (17)$$

$$g_d(s, T) = (1 - \alpha - \beta) \left(1 + \frac{y_d + T}{w_d} \right) - (\alpha + \beta)s \quad (18)$$

Table 1. 母の移転と娘の反応

	労働 h_d	余暇 l_d	育児 g_d
時間 s	α	β	$-(\alpha + \beta)$
金銭 T	$-\frac{1-\alpha}{w_d}$	$\frac{\beta}{w_d}$	$\frac{1-\alpha-\beta}{w_d}$

Table 1 は、母の時間移転 s と金銭的移転 T が娘の時間配分に与える効果をまとめたものである。1 行目は、 s が 1 単位増えたとき労働、余暇、育児の時間がどのくらい変化するかを表す。2 行目は、 T が 1 単位増えたときの変化を表す。

時間移転 s は、(15) 式の第 3 項に含まれる。 s が大きくなると、娘の育児の限界効用が低下するので、育児時間が減る。その分、労働時間 h_d と余暇 l_d が増える。金銭的移転 T は、(2) 式の左辺に含まれる。 T が大きくなると所得効果により余暇 l_d と育児 g_d が増える。その分、労働時間 h_d が減る。母から娘への移転という意味では時間も金銭も同じであるが、娘の労働への影響は正反対である。結果は次の命題に要約される。

命題 1 母は娘の子育てを手伝うために時間あるいは金銭を移転とする。時間を移転すると娘の労働供給が増える。金銭を移転すると娘の労働供給は減る。

次に、娘の間接効用関数を導出し、母の問題を考えよう。

(2), (16) 式より、娘の消費は、

$$c_d = \alpha w_d \left(1 + s + \frac{y_d + T}{w_d} \right) \quad (19)$$

である。(17), (18), (19) 式を (1) 式に代入すると、娘の間接効用関数が得られる。

$$V(s, T) = \ln \left(1 + s + \frac{y_d + T}{w_d} \right) + \alpha \ln w_d + C \quad (20)$$

ただし、 $C = \alpha \ln \alpha + \beta \ln \beta + (1 - \alpha - \beta) \ln(1 - \alpha - \beta)$ は定数である。

母の効用関数を、

$$u = \alpha \ln c_m + \beta \ln l_m + (1 - \alpha - \beta) V(s, T) \quad (21)$$

と特定化する。

(9), (10), (20) 式を (21) 式に代入し、定数項を無視すると、母の問題は次のように定式化される。

$$\max_{l_m, s, T} u = \alpha \ln [w_m(1 - l_m - s) + y_m - T] + \beta \ln l_m + (1 - \alpha - \beta) \ln \left(1 + s + \frac{y_d + T}{w_d} \right)$$

1 階の条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial l_m} = \frac{\beta}{l_m} - \frac{\alpha w_m}{c_m} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1 - \alpha - \beta}{1 + s + \frac{y_d + T}{w_d}} - \frac{\alpha w_m}{c_m} \leq 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{(1 - \alpha - \beta) \frac{1}{w_d}}{1 + s + \frac{y_d + T}{w_d}} - \frac{\alpha}{c_m} \leq 0 \quad (24)$$

(23) 式で等号が成立するのは $s^* > 0$ のときであり、(24) 式で等号が成立するのは $T^* > 0$ のときである。

(23), (24) 式がともに等号となるのは、

$$\frac{\alpha w_m}{c_m} = \frac{\alpha w_d}{c_m} \Leftrightarrow w_m = w_d \quad (25)$$

のときに限られる。

母と娘の賃金率が一致している場合に限り、母は時間と金銭を移転する。 $w_m > w_d$ のときは母の時間移転のコストが大きいので、 $s^* = 0$ を選択する。 $w_m < w_d$ のときは金銭の移転の方が相対的にコストが大きいので、 $T^* = 0$ を選択する。

以下、端点解を導出する。

Case 1. $w_m > w_d$

$s^* = 0$ より、均衡条件は次の 4 式で与えられる。

$$\begin{aligned} w_m h_m + y_m &= c_m + T \\ h_m + l_m &= 1 \\ \frac{\beta}{l_m} &= \frac{\alpha w_m}{c_m} \\ \frac{1 - \alpha - \beta}{w_d + y_d + T} &= \frac{\alpha}{c_m} \end{aligned}$$

これを解くと、

$$T^* = (1 - \alpha - \beta)(w_m + y_m) - (\alpha + \beta)(w_d + y_d) \quad (26)$$

が得られる。母の金銭的移転 T^* は、母の full income ($w_m + y_m$) の増加関数、娘の full income ($w_d + y_d$) の減少関数である。

このケースでのパラメータ制約を導出する。均衡での母の余暇は、

$$l_m^* = \frac{\beta}{w_m}(w_m + y_m + w_d + y_d) \quad (27)$$

で与えられる。 $l_m^* < 1$ より、

$$y_m + y_d < \frac{1 - \beta}{\beta} w_m - w_d$$

この式が成立するための必要条件は、

$$w_m \geq \frac{\beta}{1 - \beta} w_d$$

したがって、前提条件 $w_m > w_d$ を満たすためには、

$$\frac{\beta}{1 - \beta} > 1 \Leftrightarrow \beta > \frac{1}{2}$$

でなければならない。この条件は、母の余暇選好 β が消費選好 α が上回ることを意味しており、現実的には妥当でないように思える。

Case 2. $w_m < w_d$

$T^* = 0$ より、均衡条件は次の 4 式で与えられる。

$$\begin{aligned} w_m h_m + y_m &= c_m \\ h_m + l_m + s &= 1 \\ \frac{\beta}{l_m} &= \frac{\alpha w_m}{c_m} \\ \frac{1 - \alpha - \beta}{1 + s + \frac{y_d}{w_d}} &= \frac{\alpha w_m}{c_m} \end{aligned}$$

これを解くと、

$$s^* = 1 - 2(\alpha + \beta) + (1 - \alpha - \beta) \frac{y_m}{w_m} - (\alpha + \beta) \frac{y_d}{w_d} \quad (28)$$

が得られる。母の時間移転（孫の育児）は、母の不労所得 y_m の増加関数、母の賃金率 w_m の減少関数、娘の不労所得 y_d の減少関数、娘の賃金率 w_d の増加関数である。

このケースのパラメータ制約を導出する．母の余暇および労働はそれぞれ次式で与えられる．

$$l_m^* = \beta \left(2 + \frac{y_m}{w_m} + \frac{y_d}{w_d} \right) \quad (29)$$

$$h_m^* = 2\alpha - (1 - \alpha) \frac{y_m}{w_m} + \alpha \frac{y_d}{w_d} \quad (30)$$

便宜上，不労所得を時間に換算して， $M = y_m/w_m$ ， $D = y_d/w_d$ とおく．(28), (30) 式より，

$$s^* > 0 \Leftrightarrow M > \frac{(\alpha + \beta)(D + 2) - 1}{1 - \alpha - \beta} \quad (31)$$

$$h_m^* > 0 \Leftrightarrow M < \frac{\alpha}{1 - \alpha}(D + 2) \quad (32)$$

が得られる．平面 (D, M) 上に図示すると，(31) 式は，定点 $\left(-2, -\frac{1}{1-\alpha-\beta}\right)$ を通る傾き $\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}$ の直線 l_1 の上方を領域を表す．(32) 式は，定点 $(-2, 0)$ を通る傾き $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ の直線 l_2 の下方の領域を表す．傾きは l_1 の方が l_2 よりも大きい．2 直線 l_1, l_2 の交点を求めると，

$$P \left(\frac{1 - \alpha - 2\beta}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta} \right)$$

が得られる．点 P が第 1 象限にあれば，(31), (32) 式を同時に満たす (D, M) が存在する．必要な条件は，

$$1 - \alpha - \beta > \beta$$

である．つまり，母が自分の余暇よりも娘への利他心が強い場合に限り，均衡 $s^* > 0$ が存在する領域 $\left(\frac{y_d}{w_d}, \frac{y_m}{w_m}\right)$ が存在する．

Dimova R, Wolff F-C. (2011) Do downward private transfers enhance maternal labor supply? Evidence from around Europe. *Journal of Population Economics*. 24: 911–933.