差分方程式の解の安定性

宮澤和俊[*]

EWA「動学的マクロ経済学」の補足

Ramsey model は，非線形の連立差分方程式で記述される．本稿では，長期均衡（定常解）の近傍での安定性（局地安定性）の調べ方を説明する．

1 線形差分方程式

1.1 1 変数

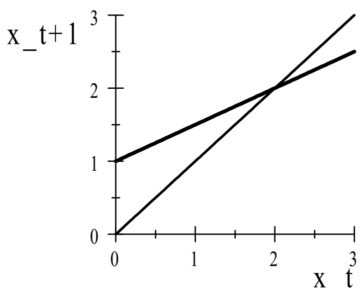
1 変数の線形差分方程式

$$x_{t+1} = ax_t + b \tag{1}$$

の解の性質を調べる（a, b は定数）．

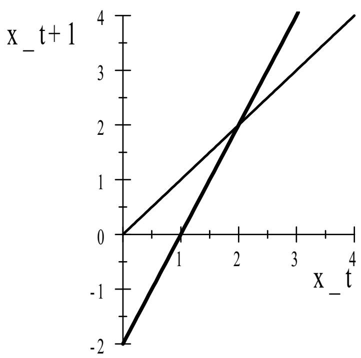
例 1. $x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + 1$
長期均衡は，$x^* = 2$．均衡は広域的に安定（図 1）．

図 1. 広域的安定



例 2. $x_{t+1} = 2x_1 - 2$
長期均衡は，$x^* = 2$．均衡は広域的に不安定（図 2）．

図 2. 広域的不安定



*Faculty of Economics, Doshisha Univeristy, Kamigyo, Kyoto 602-8580 Japan. kazu@mail.doshisha.ac.jp

(1) 式の右辺の x_t の係数 a が，安定性と関係がありそう．

(1) 式の定常解は，$a \neq 1$ のとき，

$$x^* = \frac{b}{1-a} \tag{2}$$

(2) 式を用いて，(1) 式を変形する．

$$x_{t+1} - x^* = a(x_t - x^*) \tag{3}$$

これを解いて，

$$x_t - x^* = (x_0 - x^*) \times a^t \tag{4}$$

(4) 式から，$-1 < a < 1$ のとき，解 x^* は広域的に安定であることが分かる．$0 < a < 1$ のときは単調に収束する．$-1 < a < 0$ のときは振動しながら収束する．

1.2　2 変数

2 変数の線形差分方程式

$$\begin{cases} x_{t+1} = ax_t + by_t + p \\ y_{t+1} = cx_t + dy_t + q \end{cases} \tag{5}$$

の解の性質を調べる（a, b, c, d, p, q は定数）．

行列を用いると，(5) 式は次のように表せる．

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \tag{6}$$

ただし，

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{7}$$

例.

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

まず，定常解を求める．$x_{t+1} = x_t = x^*, y_{t+1} = y_t = y^*$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

整理すると，

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここで，

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

を両辺の左側からかけると，定常解が得られる．

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

次に安定性を調べる．(8), (9) 式の辺々を引くと，

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} - x^* \\ y_{t+1} - y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t - x^* \\ y_t - y^* \end{pmatrix}$$

定常解との差を，

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_t - x^* \\ y_t - y^* \end{pmatrix}$$

と定義すると，

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} \tag{10}$$

したがって，

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

(11) 式の行列の t 乗を，固有値，固有ベクトルを用いて解く．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

とおく．

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix}$$

より，$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2, \frac{1}{2}$.
(i) $\lambda = 2$ のときの固有ベクトルの 1 つは，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) $\lambda = \frac{1}{2}$ のときの固有ベクトルの 1 つは，

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

したがって，

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$A \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

まとめると，

$$A^t \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^t & -2\left(\frac{1}{2}\right)^t \\ 0 & 3\left(\frac{1}{2}\right)^t \end{pmatrix}$$

ここで，左辺の行列の逆行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を両辺の右からかけると，

$$\begin{aligned} A^t &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^t & -2\left(\frac{1}{2}\right)^t \\ 0 & 3\left(\frac{1}{2}\right)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^t & \frac{2}{3}\left[2^t - \left(\frac{1}{2}\right)^t\right] \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって，(11) 式より，

$$Y_t = Y_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^t \tag{12.1}$$

$$X_t = X_0 \times 2^t + Y_0 \times \frac{2}{3}\left[2^t - \left(\frac{1}{2}\right)^t\right] \tag{12.2}$$

を得る．

(12.1) 式より，数列 $\{Y_t\}$ は単調にゼロに収束する．

(12.2) 式より，数列 $\{X_t\}$ は，

$$X_0 + \frac{2}{3}Y_0 = 0 \tag{13}$$

のときに限り，単調にゼロに収束する．(13) 式が満たされないときは発散する．(13) 式は，初期条件 (X_0, Y_0) が，$\lambda = \frac{1}{2}$ のときの固有ベクトル方向の原点を通る直線上に存在することを意味している．

例と同じようにして，(6) 式の連立差分方程式を解く．

定常解は次の式を満たす．

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \tag{14}$$

したがって，$(I-A)^{-1}$ が存在するとき，定常解は，次式で与えられる．

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = (I-A)^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

(6), (14) 式の辺々を引くと，

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} - x^* \\ y_{t+1} - y^* \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_t - x^* \\ y_t - y^* \end{pmatrix}$$

便宜上，

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_t - x^* \\ y_t - y^* \end{pmatrix}$$

とおく．

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}$$

したがって，

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

以下，A^t を求める．

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$

より，

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\Leftrightarrow (a-\lambda)(d-\lambda) - cd = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

<u>(16) 式が異なる 2 つの実数解 $\lambda_1 < \lambda_2$ を持つケースを考える．</u>

固有値が λ_i であるときの固有ベクトルを $\begin{pmatrix} s_i \\ t_i \end{pmatrix}$ とする．

$$\begin{pmatrix} a-\lambda_i & b \\ c & d-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_i \\ t_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この式から，$(a-\lambda_i)s_i + bt_i = 0$ を得る．$b \neq 0$ とすると，固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix} b \\ \lambda_i - a \end{pmatrix}$ である．

このとき，

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix} &\Rightarrow A^t \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix} = \lambda_1^t \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} b \\ \lambda_2 - a \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} b \\ \lambda_2 - a \end{pmatrix} &\Rightarrow A^t \begin{pmatrix} b \\ \lambda_2 - a \end{pmatrix} = \lambda_2^t \begin{pmatrix} b \\ \lambda_2 - a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

まとめると，

$$A^t \begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1 - a & \lambda_2 - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\lambda_1^t & b\lambda_2^t \\ (\lambda_1 - a)\lambda_1^t & (\lambda_2 - a)\lambda_2^t \end{pmatrix}$$

ここで，左辺の行列の逆行列

$$\begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1 - a & \lambda_2 - a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{b(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} \lambda_2 - a & -b \\ -(\lambda_1 - a) & b \end{pmatrix}$$

を両辺の右からかけると，A^t を得る．

$$\begin{aligned} A^t &= \frac{1}{b(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} b\lambda_1^t & b\lambda_2^t \\ (\lambda_1 - a)\lambda_1^t & (\lambda_2 - a)\lambda_2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 - a & -b \\ -(\lambda_1 - a) & b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{b(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} b[(\lambda_2 - a)\lambda_1^t - (\lambda_1 - a)\lambda_2^t] & b^2(-\lambda_1^t + \lambda_2^t) \\ (\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a)(\lambda_1^t - \lambda_2^t) & b[-(\lambda_1 - a)\lambda_1^t + (\lambda_2 - a)\lambda_2^t] \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

(17) 式を (15) 式に代入すると，一般解が求められる．

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \frac{1}{b(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} b[(\lambda_2 - a)\lambda_1^t - (\lambda_1 - a)\lambda_2^t] & b^2(-\lambda_1^t + \lambda_2^t) \\ (\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a)(\lambda_1^t - \lambda_2^t) & b[-(\lambda_1 - a)\lambda_1^t + (\lambda_2 - a)\lambda_2^t] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

(i) 固有値がともに正かつ 1 未満のとき（$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$）

$t \to \infty$ のとき，$\lambda_1^t \to 0, \lambda_2^t \to 0$．(18) 式の右辺の行列はゼロ行列に収束する．したがって，任意の初期条件 $(X_0, Y_0) = (x_0 - x^*, y_0 - y^*)$ について，$\lim_{t\to\infty} X_t = \lim_{t\to\infty} Y_t = 0$．定常解 (x^*, y^*) は広域的に安定である．

(ii) 固有値がともに正で，1 つは 1 未満，もう 1 つは 1 より大きいとき（$0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$）

$t \to \infty$ のとき，$\lambda_1^t \to 0, \lambda_2^t \to \infty$．(18) 式の右辺の λ_2^t の係数を調べると，

$$\begin{aligned} X_t &: \frac{-b(\lambda_1 - a)X_0 + b^2 Y_0}{b(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{bY_0 - (\lambda_1 - a)X_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ Y_t &: \frac{-(\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a)X_0 + b(\lambda_2 - a)Y_0}{b(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{(\lambda_2 - a)\left[bY_0 - (\lambda_1 - a)X_0\right]}{b(\lambda_2 - \lambda_1)} \end{aligned}$$

したがって，初期条件が，

$$bY_0 - (\lambda_1 - a)X_0 = 0 \tag{19}$$

を満たす場合に限り，$\lim_{t\to\infty} X_t = \lim_{t\to\infty} Y_t = 0$ が成り立つ．定常解 (x^*, y^*) は広域的に安定である．

(19) 式が成立しないときは，一般に，$\{X_t\}, \{Y_t\}$ は発散する[1]．定常解 (x^*, y^*) は広域的に不安定である．

(19) 式は，初期条件 (X_0, Y_0) が，固有値 λ_1 に対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする原点を通る直線状に存在することを意味している．

2　非線形差分方程式

2.1　1 変数

非線形の差分方程式を考える．

$$x_{t+1} = f(x_t) \tag{20}$$

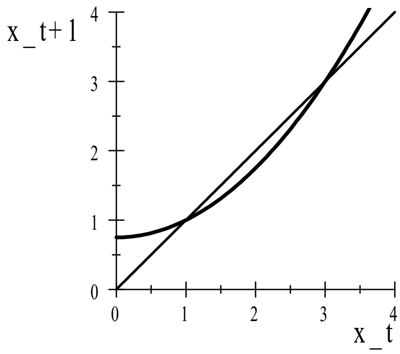
[1] 特に，$\lambda_2 = a$ のときは，$\lim_{t\to\infty} Y_t = 0$.

例.

$$x_{t+1} = \frac{1}{4}\left(x_t^2 + 3\right) \tag{21}$$

図 3 は，(21) 式を図示したものである．定常解は，$x^* = 1, 3$ の 2 つ．図より，$x^* = 1$ は安定，$x^* = 3$ は不安定である．

図 3. 局地的安定性



安定性の判断基準は，45 度線との交点における曲線の接線の傾きである．傾きの絶対値が 1 より小さければ局地的に安定であり，傾きの絶対値が 1 より大きければ局地的に不安定である．

接線の傾きを調べるということは，定常解の近傍で，$f(x)$ を 1 次近似すれば良いことを意味する．定常解は，

$$x^* = f(x^*) \tag{22}$$

より得られる．

$x = x^*$ の近傍で $f(x)$ を 1 次近似する．

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) \tag{23}$$

このとき，

$$x_{t+1} - x^* = f(x_t) - x^* = f'(x^*)(x_t - x^*) \tag{24}$$

定常解との差を，$X_t = x_t - x^*$ とおくと，

$$X_{t+1} = f'(x^*)X_t$$

を得る．したがって，$-1 < f'(x^*) < 1$ のときは局地的に安定，$f'(x^*) < -1, 1 < f'(x^*)$ のときは局地的に不安定であると判断できる．

2.2　2 変数

2 変数の非線形差分方程式

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} = g(x_t, y_t) \end{cases} \tag{25}$$

1.2 節の線形のケースの考え方と，2.1 節の線形近似の考え方を用いる．

定常解は，

$$\begin{cases} x^* = f(x^*, y^*) \\ y^* = g(x^*, y^*) \end{cases} \tag{26}$$

(25) 式を，定常解 (x^*, y^*) の近傍で 1 次近似する．

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x_t - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y_t - y^*) \\ y_{t+1} = g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x_t - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y_t - y^*) \end{cases} \tag{27}$$

定常解との差を，

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_t - x^* \\ y_t - y^* \end{pmatrix}$$

とおく．(26), (27) 式より，

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} \tag{28}$$

ただし，

$$A = \begin{pmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{pmatrix} \tag{29}$$

(28) 式より，

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \tag{30}$$

を得る．したがって，(29) 式の行列 A の固有値，固有ベクトルを用いて A^t を求めれば，$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}$ を求めることができる．2 つの固有値が，$0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ であれば，定常解は局地的に安定である．$0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ のときは，λ_1 に対応する固有ベクトルに注目する．初期条件 (X_0, Y_0) が固有ベクトル方向の原点を通る直線上にある場合に限り，定常解は局地的に安定である．戸隠山のアリの戸渡りのような経路で定常解に収束するので，鞍点安定 (saddle-point stable) という．

3 Ramsey model

本節では，ラムゼーモデルの定常解の安定性について調べる．

次の最適化問題を考える．

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \tag{31}$$

subject to

$$\text{資源制約式} \quad y_t = c_t + i_t \tag{32}$$

$$\text{マクロ生産関数} \quad y_t = f(k_t) \tag{33}$$

$$\text{資本蓄積方程式} \quad k_{t+1} = i_t + (1-\delta)k_t \tag{34}$$

下付きの t は時点を表す．c は消費，y は GDP，i は投資，k は資本である．$0 < \beta < 1$ は割引要素 (定数)，$0 \leq \delta \leq 1$ は資本減耗率 (定数) である．

式を整理すると，最適化問題を次のように定式化できる．

$$\max_{c_t,\, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \quad \text{subject to} \quad (1-\delta)k_t + f(k_t) = c_t + k_{t+1} \tag{35}$$

ラグランジュ関数を，

$$L_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ U(c_t) + \mu_t \left[(1-\delta)k_t + f(k_t) - c_t - k_{t+1} \right] \right\}$$

とおく．$\mu_t > 0$ はラグランジュ乗数である．

最適化の 1 階の条件は，

$$U'(c_t) - \mu_t = 0 \tag{36}$$

$$-\mu_t + \beta\mu_{t+1}[1 - \delta + f'(k_{t+1})] = 0 \tag{37}$$

であり，横断性条件 (transversality condition) は，

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t \mu_t k_{t+1} = 0 \tag{38}$$

である．

(36), (37) 式より，次のオイラー方程式が得られる．

$$\frac{U'(c_t)}{U'(c_{t+1})} = \beta[1-\delta+f'(k_{t+1})] \tag{39}$$

(35), (39) 式の連立非線形差分方程式，初期資本 k_0，そして (38) 式の横断性条件から，消費と資本の時間経路 $\{c_t\}, \{k_{t+1}\}$ が求められる．

長期均衡（定常経路）は，(35), (39) 式で，$k_t = k_{t+1} = k^*, c_t = c_{t+1} = c^*$ とおくことで得られる．また，割引要素 β と時間選好率 $\theta > 0$ の間に，

$$\beta = \frac{1}{1+\theta} \tag{40}$$

の関係があることを利用すると，長期均衡 (k^*, c^*) は，次の連立方程式の解であることが分かる．

$$\begin{cases} c^* = f(k^*) - \delta k^* \\ f'(k^*) = \theta + \delta \end{cases} \tag{41}$$

(35) 式は，t 時点の資本と消費 (k_t, c_t) が決まると，$(t+1)$ 時点の資本 k_{t+1} が決まることを意味する．

$$k_{t+1} = F(k_t, c_t) = (1-\delta)k_t + f(k_t) - c_t \tag{42}$$

(39) 式は，(40) 式を用いると，

$$U'(c_{t+1}) = \frac{(1+\theta)U'(c_t)}{1-\delta+f'(k_{t+1})} \tag{43}$$

と変形できる．この式は，(k_{t+1}, c_t) が決まると，c_{t+1} が決まることを意味している：

$$c_{t+1} = G(k_{t+1}, c_t) \tag{44}$$

資本と消費の動きを整理しよう．(k_t, c_t) が決まると (42) 式より k_{t+1} が決まる．さらに，(44) 式より c_{t+1} が決まる．つまり，(k_t, c_t) が決まると，(k_{t+1}, c_{t+1}) が決まる．構造的に，2 変数の非線形差分方程式であることが分かる．

以下，2.2 節の解法にしたがって，定常解の安定性を調べる．

(42) 式の $F(k_t, c_t)$，(44) 式の $G(k_{t+1}, c_t)$ を定常解 (k^*, c^*) の近傍で 1 次近似する．

$$F(k_t, c_t) = F(k^*, c^*) + F_k(k^*, c^*)(k_t - k^*) + F_c(k^*, c^*)(c_t - c^*) \tag{45.1}$$

$$G(k_{t+1}, c_t) = G(k^*, c^*) + G_k(k^*, c^*)(k_{t+1} - k^*) + G_c(k^*, c^*)(c_t - c^*) \tag{45.2}$$

(42) 式より，$F(k^*, c^*) = k^*$．また，(41) 式を用いると，

$$\begin{aligned} &F_k(k_t, c_t) = 1-\delta+f'(k_t) \Rightarrow F_k(k^*, c^*) = 1-\delta+f'(k^*) = 1+\theta \\ &F_c(k_t, c_t) = -1 \Rightarrow F_c(k^*, c^*) = -1 \end{aligned}$$

(44) 式より，$G(k^*, c^*) = c^*$．また，(44) 式を (43) 式に代入し，k_{t+1}, c_t で微分する．

$$\begin{aligned} U''(c_{t+1})G_k(k_{t+1}, c_t) &= -\frac{(1+\theta)U'(c_t)f''(k_{t+1})}{[1-\delta+f'(k_{t+1})]^2} \\ U''(c_{t+1})G_c(k_{t+1}, c_t) &= \frac{(1+\theta)U''(c_t)}{1-\delta+f'(k_{t+1})} \end{aligned}$$

これらの式を (k^*, c^*) で評価し，(41) 式を用いると，

$$\begin{aligned} U''(c^*)G_k(k^*, c^*) &= -\frac{(1+\theta)U'(c^*)f''(k^*)}{[1-\delta+f'(k^*)]^2} \Rightarrow G_k(k^*, c^*) = -\frac{1}{1+\theta}\frac{U'(c^*)}{U''(c^*)}f''(k^*) \\ U''(c^*)G_c(k^*, c^*) &= \frac{(1+\theta)U''(c^*)}{1-\delta+f'(k^*)} \Rightarrow G_c(k^*, c^*) = 1 \end{aligned}$$

これらの結果を (45.1), (45.2) 式に代入する．

$$k_{t+1} = F(k_t, c_t) = k^* + (1+\theta)(k_t - k^*) - (c_t - c^*) \tag{46.1}$$

$$c_{t+1} = G(k_{t+1}, c_t) = c^* - \frac{1}{1+\theta}\frac{U'(c^*)}{U''(c^*)}f''(k^*)(k_{t+1} - k^*) + (c_t - c^*) \tag{46.2}$$

(46.1) 式を (46.2) 式に代入し，c_{t+1} を (k_t, c_t) の関数形にする．

$$\begin{aligned} c_{t+1} - c^* &= -\frac{1}{1+\theta}\frac{U'(c^*)}{U''(c^*)}f''(k^*)\left[(1+\theta)(k_t-k^*) - (c_t-c^*)\right] + (c_t - c^*) \\ &= -\frac{U'(c^*)}{U''(c^*)}f''(k^*)(k_t-k^*) + \left[1 + \frac{1}{1+\theta}\frac{U'(c^*)}{U''(c^*)}f''(k^*)\right](c_t-c^*) \end{aligned} \tag{47}$$

定常解との差を，$K_t = k_t - k^*, C_t = c_t - c^*$ とおく．(46.1), (47) 式を行列を用いてまとめると，

$$\begin{pmatrix} K_{t+1} \\ C_{t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} K_t \\ C_t \end{pmatrix} \tag{48}$$

ただし，

$$A = \begin{pmatrix} 1+\theta & -1 \\ -\frac{U'}{U''}f'' & 1 + \frac{1}{1+\theta}\frac{U'}{U''}f'' \end{pmatrix} \tag{49}$$

(48) 式より，

$$\begin{pmatrix} K_t \\ C_t \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} K_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \tag{50}$$

したがって，(49) 式の行列の固有値，固有ベクトルを用いて，A^t を計算すればよい．

(49) 式より，

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1+\theta-\lambda & -1 \\ -\frac{U'}{U''}f'' & 1 + \frac{1}{1+\theta}\frac{U'}{U''}f'' - \lambda \end{pmatrix}$$

したがって，

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) = 0 &\Leftrightarrow (1+\theta-\lambda)\left(1 + \frac{1}{1+\theta}\frac{U'}{U''}f'' - \lambda\right) - \frac{U'}{U''}f'' = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - \left(2 + \theta + \frac{1}{1+\theta}\frac{U'}{U''}f''\right)\lambda + 1 + \theta = 0 \end{aligned} \tag{51}$$

(51) 式の左辺を $\phi(\lambda)$ とおく．

$$\phi(\lambda) = \lambda^2 - \left(2 + \theta + \frac{1}{1+\theta}\frac{U'}{U''}f''\right)\lambda + 1 + \theta$$

次の性質がある．

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 1 + \theta > 0 \\ \phi(1) &= -\frac{1}{1+\theta}\frac{U'}{U''}f'' < 0 \end{aligned}$$

2 次関数の性質から，(51) 式は異なる 2 つの実数解 $\lambda_1 < \lambda_2$ を持つ．解の存在範囲は，

$$0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2 \tag{52}$$

である．

固有ベクトルを求めて計算すると，A^t の成分には，λ_1^t, λ_2^t が含まれる．(52) 式より，$\lim_{t\to\infty}\lambda_1^t = 0$，$\lim_{t\to\infty}\lambda_2^t = \infty$．$\lambda_2^t$ の項が残る場合は，A^t は収束しない．λ_2^t の項が消える場合には，A^t はゼロ行列に収束する．このとき，定常解 (k^*, c^*) は局地的に安定である．局地的に安定であるための条件は，初期条件 (k_0, c_0) が，固有値 λ_1 に対応する固有ベクトルを方向ベクトルとする原点を通る直線上に存在するときに限られる．初期資本 k_0 は所与なので，初期消費 c_0 が直線上にくるように決められる．あるいは，shadow price $\mu_0 = U'(c_0)$ が条件を満たすように瞬時に調整される．

Ramsey model は，一般的に，固有値が (52) 式を満たすので，定常解は鞍点安定 (saddle-path stable) である．