Two past giants and five rising stars:
The economic models of fertility in Doepke el al. (2022 NBER)

Kazutoshi Miyazawa*

Doepke, Hannusch, Kindermann, and Tertilt (2022) で紹介されている出生率に関する 7 つの経済理論を紹介する．最初の 2 つが past ginants，続く 5 つが rising stars である．

1 The first big idea: The quantity and quality of children (p.10)

家計の問題　予算制約，時間制約，教育の技術制約のもとで，家計の効用を最大化する．

$$\max_{c,\,n,\,h,\,l,\,e} u(c,n,h) = \ln c + \delta \ln(nh) \tag{2}$$

subject to the budget constraint,

$$wl = c + pen \tag{1}$$

the time constraint,

$$1 = l + \phi n \tag{A1}$$

and a technology of human capital formation,

$$h = (\theta + e)^{\gamma} \tag{A2}$$

c 消費
n 子どもの数
h 子どもの人的資本
l 労働供給
e 子ども 1 人あたり教育サービス
$\delta > 0$ 利他パラメータ
w 賃金率
p 教育サービスの価格
$0 < \phi < 1$ 子ども 1 人あたり養育時間
$\theta > 0$ 教育サービス以外の人的資本形成の要素
$\gamma \geq 0$ 教育投資の効率性

(A2) 式を (2) 式に代入し，人的資本 h を消去する．(A1) 式を (1) 式に代入し，労働供給 l を消去する．

$$\max_{c,\,n,\,e} u = \ln c + \delta \ln n + \delta\gamma \ln(\theta + e)$$

subject to

$$w = c + (pe + \phi w)n \tag{A3}$$

Note. 子どもの価格は $(pe + \phi w)$．pe は教育費を表し，ϕw は養育の機会費用を表す．教育サービス e をたくさん需要すると子どもの価格が高くなる．

*Faculty of Economics, Doshisha Univeristy, Kamigyo, Kyoto 602-8580 Japan. kazu@mail.doshisha.ac.jp

教育サービスの価格は pn．子どもが多いと教育サービスの価格が高くなる．

子どもの数 n と教育サービス e の間には，一方を増やすと他方の価格が上がるという効果がある．代替的，あるいは，trade-off の関係がある．

ラグランジュ関数

$$L = \ln c + \delta \ln n + \delta\gamma \ln(\theta + e) + \lambda[w - c - (pe + \phi w)n]$$

$\lambda > 0$ ラグランジュ乗数

1 階の条件

$$\frac{\partial L}{\partial c} = \frac{1}{c} - \lambda = 0 \tag{A4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial n} = \frac{\delta}{n} - \lambda(pe + \phi w) = 0 \tag{A5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial e} = \frac{\delta\gamma}{\theta + e} - \lambda pn \leq 0 \tag{A6}$$

Note. (A6) 式は，$e^* > 0$ のとき等号が成立する．$e^* = 0$ のときは不等号が成立する．

(A4), (A5) 式を (A3) 式に代入すると，

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{w}{1+\delta}$$

したがって，

$$c = \frac{w}{1+\delta}$$

$$(pe + \phi w)n = \frac{\delta w}{1+\delta} \tag{A7}$$

消費支出と子育て費用の割合は，$1 : \delta$ である．

1. 端点解

$e^* = 0$ とする．(A7) 式より，

$$n^* = \frac{\delta}{\phi(1+\delta)} \tag{A8}$$

(A6) 式より，端点解であるための条件は，

$$w \leq \frac{p\theta}{\phi\gamma} \equiv \hat{w} \tag{A9}$$

2. 内点解

$e^* > 0$ とする．内点解であるための条件は，$w > \hat{w}$ である．

(A6) 式より，

$$pn(\theta + e) = \frac{\delta\gamma w}{1+\delta} \tag{A10}$$

(A7), (A10) 式を n, e の連立方程式とみなして解く．

$$n^* = \frac{\delta}{1+\delta}\frac{1-\gamma}{\phi - \frac{p}{w}\theta} \tag{A11}$$

$$e^* = \frac{\gamma\phi w - p\theta}{p(1-\gamma)} \tag{A12}$$

<u>比較静学</u>

1. 賃金率 w（所得）

$w < \hat{w}$ のとき，出生率は (A8) 式．教育投資はゼロ．

$w > \hat{w}$ のとき，出生率は (A11) 式，w が上昇すると出生率が低下する．教育投資は (A12) 式．w が上昇すると教育投資が増加する（quantity-quality trade-off）．

2. 教育の効率性 γ

γ が上昇すると，$\hat{w}$ が小さくなる．demographic transition が生じやすくなる．

(A11), (A12) 式より，γ が上昇すると出生率は低下し，教育投資は増える．所得水準が同じであっても，γ の値が異なる経済では出生率の水準も異なる．

2 The second big idea: The opportunity cost of women's time (p.16)

家計の問題

$$\max_{c,n,l_f} \; u = \ln c + \delta \ln n$$

subject to the budget constraint,

$$w_m l_m + w_f l_f = c \tag{A13}$$

and the time constraints

$$l_m = 1 \tag{A14}$$

$$l_f + \phi n = 1 \tag{A15}$$

c 消費
n 子どもの数
l_m 夫の労働供給
l_f 妻の労働供給
w_m 夫の賃金率
w_f 妻の賃金率
$0 < \phi < 1$ 子ども 1 人あたり養育時間

Assumption $w_m > w_f$.

夫が子育てに時間を使わない理由．養育技術に男女差がない場合，夫よりも妻の方が機会費用が小さい（$\phi w_f < \phi w_m$）．

(A14), (A15) 式を (A13) 式に代入する．

$$w_m + w_f = c + \phi w_f n$$

主体的均衡

$$c^* = \frac{w_m + w_f}{1+\delta}$$

$$n^* = \frac{\delta}{1+\delta}\frac{1}{\phi}\left(1 + \frac{w_m}{w_f}\right) \tag{4}$$

比較静学

男女の賃金格差が縮小すると（w_f/w_m が大きくなると），子どもの数 n^* が減る．

女性の労働供給は,

$$l_f^* = \frac{1}{1+\delta} - \frac{\delta}{1+\delta}\left(\frac{w_m}{w_f}\right) \tag{A16}$$

男女の賃金格差が縮小すると，女性の労働供給 l_f^* が増える．

3 Marketization of childcare (p.35)

子育て時間の一部を market chilcare で代替できる（例：保育サービス）.
家計の問題

$$\max\ u = \ln c + \delta \ln n$$

subject to

$$w_m + w_f[1-(1-s)\phi n] = c + \psi n + ps\phi n$$

c 消費
n 子どもの数
w_m 夫の賃金率
w_f 妻の賃金率
$0 < \phi < 1$ 子ども 1 人あたり養育時間
$\psi > 0$ 子ども 1 人あたり養育費
$0 \leq s \leq \bar{s}$ market childcare の割合（$\bar{s} \leq 1$ 利用できる上限）

予算制約式を変形する.

$$w_m + w_f = c + \{\psi + \phi[(1-s)w_f + sp]\}n$$

子どもの価格は，$\psi + \phi[(1-s)w_f + sp]$．$\psi + ps\phi$ は財で測ったコスト，$w_f(1-s)\phi$ は機会費用.

s を固定して，最適化問題を解く．主体的均衡は,

$$c^* = \frac{w_m + w_f}{1+\delta}$$

$$n^* = \frac{\delta}{1+\delta}\frac{w_m + w_f}{\psi + \phi[(1-s)w_f + sp]} \tag{6}$$

間接効用関数は s の関数

$$\begin{aligned} u(s) &= \ln\left(\frac{w_m + w_f}{1+\delta}\right) + \delta \ln\left\{\frac{\delta}{1+\delta}\frac{w_m + w_f}{\psi + \phi[(1-s)w_f + sp]}\right\} \\ &= \delta\ln\delta - (1+\delta)\ln(1+\delta) + (1+\delta)\ln(w_m + w_f) - \delta\ln\{\psi + \phi[(1-s)w_f + sp]\} \end{aligned}$$

最後の項に含まれる s の係数が $\phi(p - w_f)$ であることに注意する．最適な配分は,

$$s^* = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad w_f < p \\ \bar{s} & \phantom{\text{if}} \quad w_f \geq p \end{cases}$$

賃金率の低い女性（$w_f < p$）は保育サービスを利用しない．賃金率の高い女性（$w_f \geq p$）は上限まで保育サービスを利用する.

<u>女性の賃金率と出生率</u>

(6) 式を w_f で微分する.

$$\frac{\partial n^*}{\partial w_f} = \frac{\delta}{1+\delta}\frac{\psi + \phi[ps - (1-s)w_m]}{\{\psi + \phi[(1-s)w_m + sp]\}^2} \tag{7}$$

(7) 式を $s = 0$ で評価する.

$$\frac{\partial n^*}{\partial w_f}|_{s=0} = -\frac{\delta}{1+\delta}\frac{\phi w_m - \psi}{(\psi + \phi w_m)^2}$$

<u>Assumption</u> 夫の賃金率は，育児の機会費用が養育費を上回るほど大きい：　$\phi w_m - \psi > 0$.

この仮定のもとでは，market childcare が利用できないとき，妻の賃金率が上昇すると出生率が低下する.
次に (7) 式より,

$$\frac{\partial n^*}{\partial w_f} \lesseqqgtr 0 \quad \text{if} \quad s \lesseqqgtr \hat{s} \tag{A17}$$

where

$$\hat{s} = \frac{\phi w_m - \psi}{\phi(p + w_m)} > 0 \tag{A18}$$

$w_f \geq p$ とする．妻は上限まで market childcare を利用する（$s^* = \bar{s}$）．
(i) $\bar{s} < \hat{s}$ のとき．(A17) 式より，$\partial n^*/\partial w_f < 0$．妻の賃金率が上昇すると出生率が低下する．
(ii) $\bar{s} = \hat{s}$ のとき．(A17) 式より，$\partial n^*/\partial w_f = 0$．妻の賃金率が上昇しても出生率は変わらない．
(i) $\bar{s} > \hat{s}$ のとき．(A17) 式より，$\partial n^*/\partial w_f > 0$．妻の賃金率が上昇すると出生率が上昇する．

まとめると，market childcare の利用上限が緩和されると，妻の賃金率と出生率の相関は負から正に転じる．

4 Careers and the timing of fertility (p.39)

2 期モデル
出産のタイミングは 3 択：$(n_1, n_2) = (0,0), (1,0), (0,1)$
順に，no children, early children, late children
効用関数

$$u = \ln c_1 + vn_1 + E[\ln c_2 + vn_2]$$

$v > 0$ 子どもへの利他

Assumption（高齢出産のリスク）late births を選択した場合，実際に産まれる確率は $0 < \pi < 1$．

人的資本形成

$$h = h(e) = \kappa e^{\gamma} \tag{A19}$$

h 2 期の人的資本
e 1 期の教育時間
$\kappa > 0$, $0 < \gamma < 1$ パラメータ

Assumption 貯蓄なし．

消費配分

$$c_1 = w_f(1 - e - \phi n_1)$$
$$c_2 = w_f h(1 - \phi n_2)$$

1. No children $(n_1, n_2) = (0,0)$
効用関数

$$u_{00} = \ln[w_f(1-e)] + \ln(w_f \kappa e^{\gamma})$$

Optimality condition for education

$$\frac{\partial u_{00}}{\partial e} = -\frac{1}{1-e} + \frac{\gamma}{e} = 0$$

which yields

$$e^*_{00} = \frac{\gamma}{1+\gamma} \tag{8.1}$$

Indirect utility

$$u_{00} = \ln[w_f(1 - e^*_{00})] + \ln[w_f \kappa (e^*_{00})^{\gamma}] \tag{9}$$

2. Early children $(n_1, n_2) = (1,0)$
効用関数

$$u_{10} = \ln[w_f(1 - \phi - e)] + v + \ln(w_f \kappa e^{\gamma})$$

Optimality condition for education

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial e} = -\frac{1}{1-\phi-e} + \frac{\gamma}{e} = 0$$

which yields

$$e_{10}^* = \frac{\gamma}{1+\gamma}(1-\phi) = (1-\phi)e_{00}^* \tag{8.2}$$

Indirect utility

$$\begin{aligned} u_{10} &= \ln[w_f(1-\phi-e_{10}^*)] + v + \ln[w_f\kappa(e_{10}^*)^\gamma] \\ &= \ln[w_f(1-\phi)(1-e_{00}^*)] + v + \ln[w_f\kappa((1-\phi)e_{00}^*)^\gamma] \end{aligned}$$

Using (8.2) and (9), we obtain

$$u_{10} = u_{00} + v + (1+\gamma)\ln(1-\phi) \tag{10}$$

Note. $\ln(1-\phi) < 0$ because $\phi > 0$. v represents the benefit of births, and $-(1+\gamma)\ln(1-\phi) > 0$ represents the cost of early births.

3. Late children $(n_1, n_2) = (0, 1)$
効用関数

$$\begin{aligned} u_{01} &= \ln[w_f(1-e)] + \pi[\ln(w_f(1-\phi)\kappa e^\gamma) + v] + (1-\pi)\ln(w_f\kappa e^\gamma) \\ &= \ln[w_f(1-e)] + \ln(w_f\kappa e^\gamma) + \pi[v + \ln(1-\phi)] \end{aligned}$$

Optimality condition for education

$$\frac{\partial u_{01}}{\partial e} = -\frac{1}{1-e} + \frac{\gamma}{e} = 0$$

which yields

$$e_{01}^* = \frac{\gamma}{1+\gamma} = e_{00}^* \tag{8.3}$$

Indirect utility

$$u_{01} = \ln[w_f(1-e_{01}^*)] + \ln[w_f\kappa(e_{01}^*)^\gamma] + \pi[v + \ln(1-\phi)]$$

Using (8.3) and (9), we obtain

$$u_{01} = u_{00} + \pi[v + \ln(1-\phi)] \tag{11}$$

<u>Proposition 1</u>

Mothers with early children is less educated than mothers with late children and mothers without children:

$$e_{10}^* < e_{01}^* = e_{00}^*$$

<u>Extensive margin</u>

(10), (11) 式より，

$$u_{10} > u_{00} \Leftrightarrow v > -(1+\gamma)\ln(1-\phi) > 0$$

$$u_{01} > u_{00} \Leftrightarrow v > -\ln(1-\phi) > 0$$

したがって，女性が子を産まない条件は，

$$v \le -\ln(1-\phi) \tag{A20}$$

Note. 子への利他 v と養育時間 ϕ だけで extensive margin が決まる．養育時間 ϕ が減ると右辺が小さくなる．子を産まない女性が減る．

<u>Timing of births</u>

(10), (11) 式より，

$$\begin{aligned} u_{10} > u_{01} &\Leftrightarrow v + (1+\gamma)\ln(1-\phi) > \pi[v + \ln(1-\phi)] \\ &\Leftrightarrow (1-\pi)[v + \ln(1-\phi)] > -\gamma\ln(1-\phi) \end{aligned} \tag{12}$$

解釈．(12) 式の左辺は，不妊の期待費用（expected costs of infecundity），右辺は，早期出産のキャリアコスト（career cost of early children）(**p.40**)

(A20), (12) 式より，均衡における出産選択が得られる（**Figure 17**）．

$$(n_1, n_2) = \begin{cases} (0,0) & \text{if} \quad 0 \le v \le -\ln(1-\phi) \\ (0,1) & \quad -\ln(1-\phi) \le v \le -\left(1+\frac{\gamma}{1-\pi}\right)\ln(1-\phi) \\ (1,0) & \quad -\left(1+\frac{\gamma}{1-\pi}\right)\ln(1-\phi) \le \gamma \end{cases}$$

子への利他 v に応じて，出産パターンが決まる．利他の小さい女性は出産しない．利他の大きい女性は早期出産を選ぶ．利他が中程度の女性は晩産を選ぶ.

比較静学

late children と early children の閾値は,

$$\hat{v} = -\left(1+\frac{\gamma}{1-\pi}\right)\ln(1-\phi)$$

教育の効率性 γ が上がると閾値 $\hat{v}$ が大きくなる．late children を選ぶ女性が増える．

高齢出産の成功確率 π が上がる閾値 $\hat{v}$ が大きくなる．late children を選ぶ女性が増える．

5 Family policies (p.48)

保育政策：妻の養育時間 ϕn を補助する．財源は一般財源（モデルでは陽表的に扱わない）．

家計の問題

$$\max_{c,\,n,\,l_f} \; u = \ln c + \delta \ln n$$

subject to the budget constraint,

$$w_m l_m + w_f l_f = c + \psi n$$

and time constraints

$$l_m = 1$$
$$l_f = 1 - (1-s)\phi n$$

c 消費

n 子どもの数

l_m 夫の労働供給

l_f 妻の労働供給

w_m 夫の賃金率

w_f 妻の賃金率

$0 < \phi < 1$ 子ども 1 人あたりの養育時間

$\psi > 0$ 子ども 1 人あたりの養育費

$0 \le s < 1$ 妻の養育時間への補助率

家計の問題

$$\max_{c,\,n,\,l_f} \; u = \ln c + \delta \ln n$$

subject to

$$w_m + w_f = c + [\psi + (1-s)\phi w_f]n$$

ラグランジュ関数

$$L = \ln c + \delta \ln n + \lambda \{w_m + w_f - c - [\psi + (1-s)\phi w_f]n\}$$

1 階の条件

$$\frac{1}{c} - \lambda = 0$$
$$\frac{\delta}{n} - \lambda[\psi + (1-s)\phi w_f] = 0$$

主体的均衡

$$c^* = \frac{w_m + w_f}{1+\delta}$$
$$n^* = \frac{\delta}{1+\delta}\frac{w_m + w_f}{\psi + (1-s)\phi w_f} \tag{14}$$

妻の労働供給

$$l_f^* = 1 - (1-s)\phi n^* = 1 - \frac{\delta}{1+\delta}\frac{(1-s)\phi(w_m + w_f)}{\psi + (1-s)\phi w_f} \tag{15}$$

比較静学

1. 補助率 s
   (14) 式より，補助率 s が上がると出生率が上昇する．
   (15) 式より，補助率 s が上がると女性の労働供給が増える．
   女性の労働参加と出生率の正の相関が説明できる．

2. 女性の賃金率と出生率
   (14) 式より，

$$\frac{\partial n^*}{\partial w_f} = \frac{\delta}{1+\delta}\frac{\psi - (1-s)\phi w_m}{[\psi + (1-s)\phi w_f]^2}$$

   女性の賃金率の上昇が出生率に与える影響は，男性の賃金率の水準に依存する．

$$\frac{\partial n^*}{\partial w_f} \lesseqqgtr 0 \quad \text{if} \quad w_m \gtreqqless \frac{\psi}{(1-s)\phi} \equiv \hat{w}_m \tag{A21}$$

   男性の賃金率 w_m が高いとき（$w_m > \hat{w}_m$），女性の賃金率が上がると出生率が低下する（traditional era）．
   男性の賃金率 w_m が低いとき（$w_m < \hat{w}_m$），女性の賃金率が上がると出生率が上昇する（new era）．

3. 保育政策の効果
   (A21) 式より，

$$\frac{\partial \hat{w}_m}{\partial s} > 0$$

   保育政策の拡大は，traditional era を縮小し，new era を拡大する．

6 Bargaining over fertility (p.54)

同居夫婦の選択

1. 子を持つか（$n=1$），持たないか（$n=0$）を決める．
2. 交渉により消費配分を決める．

子についての選択と同時に消費配分を決め，その決定を守るケースを「commitment あり」，子についての選択の後，消費配分について再交渉を認めるケースを「commitment なし」と呼ぶ．

両者の違いは，outside option．子を持つと養育費が生じる．再交渉時の outside option は，子を持つときと持たないときでは異なる．「commitment なし」のケースでは，将来の再交渉を読み込んで子についての選択をするため，子を持たない可能性が高くなる．

個人 $i = f, m$ の効用関数（f が妻，m が夫）

$$u_i(n) = c_i + v_i n \tag{A22}$$

c_i 消費
$n \in \{0, 1\}$ 子どもの数
$v_i \geq 0$ 子への利他

家族の予算制約式

$$(1+\alpha)(w_m + w_f) = c_m + c_f + (\chi_m w_m + \chi_f w_f)\phi n \tag{16}$$

w_m 夫の賃金率
w_f 妻の賃金率
$\phi > 0$ 子ども 1 人あたり養育時間
χ_m, χ_f 夫と妻の養育時間の割合

$$\chi_m + \chi_f = 1$$

$\alpha > 0$ 同居の規模の利益

Note. (16) 式の右辺第 3 項は，養育の機会費用を表す．以下，

$$\hat{w} = \chi_m w_m + \chi_f w_f$$

を用いる．

6.1 Equilibrium with commitment

Outside option: 同居するが子は持たない．自分の所得を消費する．

$$\begin{cases} \bar{u}_m(0) = w_m \\ \bar{u}_f(0) = w_f \end{cases}$$

ナッシュ交渉解

$$\max_{c_m, c_f, n} [u_m(n) - \bar{u}_m(0)]^{\frac{1}{2}} [u_f(n) - \bar{u}_f(0)]^{\frac{1}{2}} \tag{A23}$$

subject to

$$(1+\alpha)(w_m + w_f) = c_m + c_f + \hat{w}\phi n$$

(A22) 式を用いて，予算制約式から効用フロンティアを導出する．

$$u_m(n) + u_f(n) = (1+\alpha)(w_m + w_f) + (v_m + v_f - \hat{w}\phi)n \tag{A24}$$

Note. 平面 (u_m, u_f) 上で，効用フロンティアは傾き -1 の線分で表される．

$$v_m + v_f \geq \hat{w}\phi \tag{18}$$

のとき，$n = 1$ のフロンティアは $n = 0$ のフロンティアよりも右上にある．

(A23) 式の目的関数を 2 乗しても解は不変．

$$\max_{u_m, u_f, n} [u_m - \bar{u}_m(0)][u_f - \bar{u}_f(0)]$$

subject to

$$u_m + u_f = (1+\alpha)(w_m + w_f) + (v_m + v_f - \hat{w}\phi)n$$

ラグランジュ関数

$$L = [u_m - \bar{u}_m(0)][u_f - \bar{u}_f(0)] + \lambda[(1+\alpha)(w_m + w_f) + (v_m + v_f - \hat{w}\phi)n - u_m - u_n]$$

1 階の条件

$$\frac{\partial L}{\partial u_m} = u_f - \bar{u}_f(0) - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial u_f} = u_m - \bar{u}_m(0) - \lambda = 0$$

これらを (A24) 式に代入して λ を求める．outside option を代入すると，

$$(\lambda + w_m) + (\lambda + w_f) = (1+\alpha)(w_m + w_f) + (v_m + v_f - \hat{w}\phi)n$$

したがって，

$$\lambda^* = \frac{\alpha}{2}(w_m + w_f) + \frac{1}{2}(v_m + v_f - \hat{w}\phi)n$$

このとき，夫婦の効用は，

$$\begin{aligned} u_m(n) &= w_m + \frac{\alpha}{2}(w_m + w_f) + \frac{1}{2}(v_m + v_f - \hat{w}\phi)n \\ u_f(n) &= w_f + \frac{\alpha}{2}(w_m + w_f) + \frac{1}{2}(v_m + v_f - \hat{w}\phi)n \end{aligned} \tag{17}$$

右辺の第 1 項は outside option，第 2 項は同居から得られる余剰，第 3 項は子から得られる余剰を意味する．

(17) 式より，

$$\begin{cases} u_m(1) \geq u_m(0) \\ u_f(1) \geq u_f(0) \end{cases} \quad \text{if and only if} \quad v_m + v_f \geq \hat{w}\phi \tag{18}$$

が成り立つ．

Proposition

Commitment があるときの均衡は次の通り．

(i) $v_m + v_f \geq \hat{w}\phi$ のとき，子どもを持つ．消費配分は，

$$c_m^* = u_m(1) - v_m = w_m + \frac{\alpha}{2}(w_m + w_f) + \frac{1}{2}(v_f - v_m - \hat{w}\phi)$$
$$c_f^* = u_f(1) - v_f = w_f + \frac{\alpha}{2}(w_m + w_f) + \frac{1}{2}(v_m - v_f - \hat{w}\phi)$$

(ii) $v_m + v_f < \hat{w}\phi$ のとき，子どもを持たない．消費配分は，

$$c_m^* = u_m(0) = w_m + \frac{\alpha}{2}(w_m + w_f)$$
$$c_f^* = u_f(0) = w_f + \frac{\alpha}{2}(w_m + w_f)$$

6.2 Equilibrium without commitment

子を持つと養育費が生じる．再交渉時の outside option は，

$$\bar{u}_m(n) = w_m + (v_m - \chi_m w_m \phi)n$$
$$\bar{u}_f(n) = w_f + +(v_f - \chi_f w_f \phi)n$$

(i) 子を持たなかったとき．

$$\max_{c_m,\, c_f} (u_m - w_m)^{\frac{1}{2}}(u_f - w_f)^{\frac{1}{2}}$$

subject to

$$u_m + u_f = (1+\alpha)(w_m + w_f)$$

1 階の条件

$$u_f - w_f - \lambda = 0$$
$$u_m - w_m - \lambda = 0$$

これらを解くと，

$$\lambda = \frac{\alpha}{2}(w_m + w_f)$$

したがって，

$$u_m(0) = w_m + \frac{\alpha}{2}(w_m + w_f)$$
$$u_f(0) = w_f + \frac{\alpha}{2}(w_m + w_f) \tag{A25}$$

(ii) 子を持ったとき．

$$\max_{c_m, c_f} [u_m - \bar{u}_m(1)]^{\frac{1}{2}}[u_f - \bar{u}_f(1)]^{\frac{1}{2}}$$

subject to

$$u_m + u_f = (1+\alpha)(w_m + w_f) + v_m + v_f - \hat{w}\phi$$

1 階の条件

$$u_f - \bar{u}_f(1) - \lambda = 0$$
$$u_m - \bar{u}_m(1) - \lambda = 0$$

これらを解くと，

$$2\lambda + \bar{u}_m(1) + \bar{u}_f(1) = (1+\alpha)(w_m + w_f) + v_m + v_f - \hat{w}\phi$$

which yields

$$\lambda = \frac{\alpha}{2}(w_m + w_f)$$

したがって，

$$u_m(1) = w_m + v_m - \chi_m w_m \phi + \frac{\alpha}{2}(w_m + w_f)$$
$$u_f(1) = w_f + v_f - \chi_f w_f \phi + \frac{\alpha}{2}(w_m + w_f) \tag{A26}$$

(A25), (A26) 式より，

$$u_m(1) \geq u_m(0) \Leftrightarrow v_m \geq \chi_m w_m \phi$$
$$u_f(1) \geq u_f(0) \Leftrightarrow v_f \geq \chi_f w_f \phi \tag{A27}$$

(A27) 式の 2 つの条件がともに満たされる場合に限り，夫婦は子を持とうとする．いずれか一方の条件が満たされないとき夫婦は子を持たない．

<u>Proposition</u>

Commitment がないときの均衡は次の通り．

(i) $v_m \geq \chi_m w_m \phi$ and $v_f \geq \chi_f w_f \phi$ のとき，夫婦は子を持つ．消費配分は，

$$c_m = u_m(1) - v_m = w_m - \chi_m w_m \phi + \frac{\alpha}{2}(w_m + w_f)$$
$$c_f = u_f(1) - v_f = w_f - \chi_f w_f \phi + \frac{\alpha}{2}(w_m + w_f)$$

(ii) (i) 以外のとき，夫婦は子を持たない．消費配分は，

$$c_m = u_m(0) = w_m + \frac{\alpha}{2}(w_m + w_f)$$
$$c_f = u_f(0) = w_f + \frac{\alpha}{2}(w_m + w_f)$$

Commitment の意義

2 つの条件

$$v_m + v_f \geq \hat{w}\phi \tag{18}$$

$$\begin{cases} v_m \geq \chi_m w_m \phi \\ v_f \geq \chi_f w_f \phi \end{cases} \tag{A27}$$

を比較する．

平面 (v_m, v_f) 上において，(18) 式は，直線 $v_m + v_f = \hat{w}\phi$ の上方の領域 D_1 を表す．

$\chi_m w_m + \chi_f w_f = \hat{w}$ であるから，点 $(\chi_m w_m \phi, \chi_f w_f \phi)$ は直線 $v_m + v_f = \hat{w}\phi$ の上にある．(A27) 式は，点 $(\chi_m w_m \phi, \chi_f w_f \phi)$ を頂点とする L 字型の領域 D_2 を表す．

明らかに，$D_2 \subset D_1$ である．commitment がないとき，夫婦が子を持つ可能性が低くなる．

7 Social norms (p.62)

昭和の母「赤ちゃんには母乳あげなきゃ」
平成の娘「やだ．体型くずれる」

夫妻の選択

1. 子どもの数 $n \in \{1, 0\}$
2. market childcare の割合 $0 \leq s \leq 1$

Social norm $0 \leq s^* \leq 1$　「常識的には s^* でしょ」

夫婦の問題

$$\max_{c,\, n,\, s} u = c + vn - n \times \frac{\tau}{2}(s - s^*)^2 \tag{A28}$$

subject to

$$w_m + w_f[1 - (1 - s)\phi n] = c + ps\phi n \tag{A29}$$

c 消費
$v > 0$ 子どもへの利他（夫婦により異なる）
$\tau > 0$ 心理的コストの大きさ
w_m 夫の賃金率
w_f 妻の賃金率
$\phi > 0$ 養育時間
$p > 0$ market childcare の価格

Note. (A28) 式の第 3 項は,「常識的な market childcare」と自分が選択する market childcare の差が心理的なコストを生じることを表している．

7.1 The choice of market childcare

$n = 1$ とする．

(A29) 式の c を (A28) 式に代入すると，夫婦の問題は次のように定式化できる．

$$\max_{0 \leq s \leq 1} u = w_m + w_f(1 - \phi) + v + s\phi(w_f - p) - \frac{\tau}{2}(s - s^*)^2 \tag{A30}$$

(A30) 式は s の 2 次関数．ヨコ軸を s として図を描くと上に凸の放物線になる．場合分けをして最適な share s^o を求めることができる．

(A30) 式を s で微分する．

$$\frac{du}{ds} = \phi(w_f - p) - \tau(s - s^*)$$

$\tau > 0$ なので，du/ds は s の減少関数.

(i) $s = 0$ で評価する.

$$\frac{du}{ds}|_{s=0} = \phi(w_f - p) + \tau s^*$$

この値が負であるとする（軸 < 0 のケース）.

$$\phi(w_f - p) + \tau s^* < 0 \Rightarrow w_f < p - \frac{\tau}{\phi} s^* \equiv \underline{w}_f \tag{A31}$$

このとき，すべての $0 \le s \le 1$ について $du/ds < 0$ なので，最適な share は $s^o = 0$ である.

(ii) $s = 1$ で評価する.

$$\frac{du}{ds}|_{s=1} = \phi(w_f - p) + \tau(1 - s^*)$$

この値が正であるとする（軸 > 1 のケース）.

$$\phi(w_f - p) - \tau(1 - s^*) > 0 \Rightarrow w_f > p + \frac{\tau}{\phi}(1 - s^*) \equiv \bar{w}_f \tag{A32}$$

このとき，すべての $0 \le s \le 1$ について $du/ds > 0$ なので，最適な share は $s^o = 1$ である.

(iii) (i), (ii) 以外のケース（$0 <$ 軸 < 1 のケース）

$$p - \frac{\tau}{\phi} s^* \le w_f \le p + \frac{\tau}{\phi}(1 - s^*)$$

このときは，$du/ds = 0$ から最適な share が得られる.

$$s^o = s^* + \frac{\phi}{\tau}(w_f - p)$$

以上をまとめると，子を持つときの最適な share は次式で与えられる.

$$s^o = \begin{cases} 0 & \\ s^* + \frac{\phi}{\tau}(w_f - p) & \text{if} \\ 1 & \end{cases} \begin{array}{l} w_f < \underline{w}_f \\ \underline{w}_f \le w_f \le \bar{w}_f \\ \bar{w}_f < w_f \end{array} \tag{A33}$$

妻の賃金率 w_f が上昇するにつれて market childcare を利用するようになる．2 つの閾値 $\underline{w}_f, \bar{w}_f$ は，social norm s^* に依存する．s^* が大きくなると，2 つの閾値はともに小さくなる．つまり，w_f が上昇するとき，social norm s^* が大きい経済ほどより多くの market childcare を利用する.

7.2 The choice of fertility

$n = 0$ のときの効用水準は,

$$u_0 = c = w_m + w_f \tag{A34}$$

(A30) 式の（間接）効用と (A34) 式を比較して，子を持つか持たないかを決める.

$$u - u_0 = v - \phi w_f + s^o \phi(w_f - p) - \frac{\tau}{2}(s^o - s^*)^2$$

夫婦が子を持つための条件

$$u \ge u_0 \Leftrightarrow v \ge \underline{v} \tag{A35}$$

where

$$\underline{v} = \phi w_f - s^o \phi(w_f - p) + \frac{\tau}{2}(s^o - s^*)^2 \tag{A36}$$

ただし，s^o は (A33) 式で与えられる.

<u>子への利他の下限 $\underline{v}$</u>

(i) $w_f < \underline{w}_f$ のとき．$s^o = 0$ なので，

$$\underline{v} = \phi w_f + \frac{\tau}{2}(s^*)^2$$

(ii) $\bar{w}_f < w_f$ のとき．$s^o = 1$ なので，

$$\underline{v} = \phi p + \frac{\tau}{2}(1 - s^*)^2$$

(iii) $\underline{w}_f \le w_f \le \bar{w}_f$ のとき．$s^o = s^* + \frac{\phi}{\tau}(w_f - p)$ なので，

$$\begin{aligned}\underline{v} &= \phi w_f - \left[s^* + \frac{\phi}{\tau}(w_f - p)\right]\phi(w_f - p) + \frac{\tau}{2}\left[\frac{\phi}{\tau}(w_f - p)\right]^2 \\ &= \phi w_f - s^*\phi(w_f - p) - \frac{\phi^2}{2\tau}(w_f - p)^2\end{aligned}$$

以上をまとめると，下限 $\underline{v}$ は次の通り．

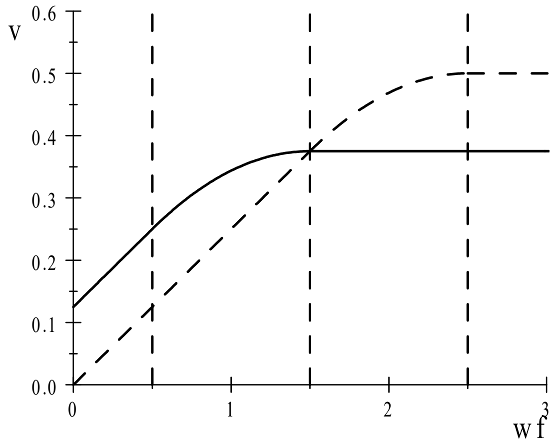
$$\underline{v} = \begin{cases} \phi w_f + \frac{\tau}{2}(s^*)^2 & w_f < \underline{w}_f \\ \phi w_f - s^*\phi(w_f - p) - \frac{\phi^2}{2\tau}(w_f - p)^2 \quad \text{if} & \underline{w}_f \le w_f \le \bar{w}_f \\ \phi p + \frac{\tau}{2}(1 - s^*)^2 & \bar{w}_f < w_f \end{cases} \tag{A37}$$

ヨコ軸を w_f として図示する．区間 $(0, \underline{w}_f]$ では傾き ϕ の直線，区間 $[\underline{w}_f, \bar{w}_f]$ では上に凸の放物線，区間 $[\bar{w}_f, \infty)$ では水平線.

全体としては右上がり．w_f が増えると (A35) 式が成立する v の範囲が狭くなる．つまり，夫婦が子を持つ可能性が小さくなる.

Note. $\underline{v}$ の水準は，social norm s^* に依存する．次の図の破線は，$s^* = 0$ のときの (A37) 式を図示したもの．実線は，$s^* = 1$ のときの (A37) 式を図示したもの．$w_f < 1.5$ の範囲では，social norm が $s^* = 0$ のときの方が子を持つ夫婦が多く出生率が高い．$w_f > 1.5$ の範囲では，$\underline{v}$ の水準が逆転し，social norm が $s^* = 1$ のときの方が出生率が高い．また，$w_f > 1.5$ の範囲で w_f が上昇するとき，social norm $s^* = 0$ のもとでは出生率が低下するが，$s^* = 1$ のもとでは，出生率は一定である．女性の賃金率と出生率の関係は，social norm に影響されることが分かる.

Figure. $\underline{v} = \underline{v}(w_f; s^*)$ のグラフ



Note. The dashed curve represents (A37) when $s^* = 0$, and the solid curve is when $s^* = 1$. We use $p = 1.5$, $\phi = 0.25$, $\tau = 0.25$ (See p.64, Figure 22).

Doepke M, Hannusch A, Kindermann F, Tertilt M. (2022) The economics of fertility: A new era. *NBER Working Paper* No. 29948. 1-120.