

第 11 講 市場均衡 (1) 交換経済 (テキスト 132-136 ページ)

先生「今日は、数式を用いて交換経済を学びます」

太郎「数式だって」

花子「先生、数学好きだよ」

問題 1 花子は、リンゴを 60 個、みかんを 30 個持っている。効用関数を、

$$u = U(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

とする (x_1 リンゴの消費量, x_2 みかんの消費量).

リンゴ 1 個 100 円, みかん 1 個 40 円で交換の機会が与えられたとき, 花子はどのような取引をするか.

解答

いったんすべてを売却したのち買い戻す状況を想定する。予算制約式は、

$$7200 = 100x_1 + 40x_2$$

である。花子の効用最大化問題は、次のように定式化される。

$$\max_{x_1, x_2} u = x_1 x_2 \quad \text{subject to} \quad 7200 = 100x_1 + 40x_2$$

最適化条件は、

$$\begin{aligned} MRS_{21} &= \frac{100}{40} \\ 7200 &= 100x_1 + 40x_2 \end{aligned}$$

ここで, $MRS_{21} = u_1/u_2 = x_2/x_1$ より, $100x_1 = 40x_2$. これより, $(x_1^*, x_2^*) = (36, 90)$ が得られる。したがって, リンゴを $60 - 36 = 24$ 個売り, みかんを $90 - 30 = 60$ 個買うという取引をする。

問題 2

上の例題で, リンゴの価格を p_1 , みかんの価格を p_2 としたときの需要関数 (x_1^*, x_2^*) を求めよ。

解答

花子の効用最大化問題は、次のように定式化される。

$$\max_{x_1, x_2} u = x_1 x_2 \quad \text{subject to} \quad 60p_1 + 30p_2 = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

最適化条件は、

$$\begin{aligned} MRS_{21} &= \frac{p_1}{p_2} \\ 60p_1 + 30p_2 &= p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{aligned}$$

ここで, $MRS_{21} = u_1/u_2 = x_2/x_1$ より, $p_1 x_1 = p_2 x_2$. したがって, $60p_1 + 30p_2 = 2p_1 x_1$ より,

$$x_1^* = 30 + 15 \frac{p_2}{p_1} \tag{1}$$

同様に、

$$x_2^* = 15 + 30 \frac{p_1}{p_2} \tag{2}$$

2財(リンゴ, みかん), 2個人(A, B)からなる交換経済を考える. 各個人の賦存量は次のようであるとする.

	リンゴ	みかん
個人 A の賦存量	60	30
個人 B の賦存量	0	60
総賦存量	60	90

1. 主體的均衡

個人 A の最適化問題

$$\max_{x_1^A, x_2^A} u = u^A(x_1^A, x_2^A) \quad \text{subject to} \quad 60p_1 + 30p_2 = p_1x_1^A + p_2x_2^A$$

上付きの A, B は個人を表す. 下付きの 1, 2 は財を表す. たとえば, x_1^A は個人 A のリンゴの消費量を表す.

最適化の条件

$$MRS_{21}^A = \frac{p_1}{p_2} \tag{3}$$

$$60p_1 + 30p_2 = p_1x_1^A + p_2x_2^A \tag{4}$$

を解くと, 主體的均衡 $A(x_1^{A*}, x_2^{A*})$ が得られる (図 4.9).

需要 x_1^{A*}, x_2^{A*} は相対価格 $p = p_1/p_2$ の関数である.

個人 B の最適化問題

$$\max_{x_1^B, x_2^B} u = u^B(x_1^B, x_2^B) \quad \text{subject to} \quad 60p_2 = p_1x_1^B + p_2x_2^B$$

最適化の条件

$$MRS_{21}^B = \frac{p_1}{p_2} \tag{5}$$

$$60p_2 = p_1x_1^B + p_2x_2^B \tag{6}$$

を解くと, 主體的均衡 $B(x_1^{B*}, x_2^{B*})$ が得られる (図 4.10).

需要 x_1^{B*}, x_2^{B*} は相対価格 $p = p_1/p_2$ の関数である.

2. 市場均衡

リンゴ市場, みかん市場の均衡条件は次式で与えられる.

$$x_1^{A*} + x_1^{B*} = 60 \tag{7}$$

$$x_2^{A*} + x_2^{B*} = 90 \tag{8}$$

3. ワルラス法則と相対価格

みかん市場の均衡条件 (8) 式は, 各個人の予算制約 (4), (6) 式と, リンゴ市場の均衡条件 (7) 式から導出される¹. 需要関数を (7) 式 (あるいは (8) 式) に代入すると, 均衡における相対価格 $p^* = (p_1/p_2)^*$ が求められる. 各個人の需要 (x_1^{A*}, x_2^{A*}) , (x_1^{B*}, x_2^{B*}) および取引量も求められる.

¹(4), (6) 式の辺々を加える.

$$60p_1 + 90p_2 = p_1(x_1^A + x_1^B) + p_2(x_2^A + x_2^B)$$

(7) 式および $p_2 > 0$ より (8) 式が得られる.

一般に, n 個の市場があつて, ある価格体系のもとで $(n-1)$ 個の市場が均衡しているとき, 残りの 1 つの市場も均衡する. ワルラス法則という.

問題 3

各個人の効用関数を $u^A = x_1^A x_2^A$, $u^B = x_1^B x_2^B$ とする.

- (1) 個人 B の需要 x_1^{B*}, x_2^{B*} を, 相対価格 $p = p_1/p_2$ を用いて表せ.
- (2) 市場均衡における相対価格 p^* を求めよ.
- (3) 均衡需要量 $(x_1^{A*}, x_2^{A*}), (x_1^{B*}, x_2^{B*})$ を求めよ.
- (4) 個人 A, B の間でどのような取引がなされたのか説明せよ.

解答

- (1) 個人 B の最適化問題は, 次のように定式化される.

$$\max_{x_1^B, x_2^B} u^B = x_1^B x_2^B \quad \text{subject to} \quad 60p_2 = p_1 x_1^B + p_2 x_2^B$$

最適化の条件は,

$$\begin{aligned} MRS_{21}^B &= \frac{p_1}{p_2} \\ 60p_2 &= p_1 x_1^B + p_2 x_2^B \end{aligned}$$

ここで, $MRS_{21}^B = u_1^B/u_2^B = x_2^B/x_1^B$ より, $p_1 x_1^B = p_2 x_2^B$. したがって, $60p_2 = 2p_2 x_2^B$ より,

$$x_2^{B*} = 30 \tag{9}$$

同様にして,

$$x_1^{B*} = 30 \frac{p_2}{p_1} = \frac{30}{p} \tag{10}$$

- (2) (2), (9) 式を, (8) 式に代入する.

$$(15 + 30p) + 30 = 90$$

これを解いて,

$$p^* = \frac{3}{2} \tag{11}$$

- (別解) (1), (10) 式を, (7) 式に代入する.

$$\left(30 + \frac{15}{p}\right) + \frac{30}{p} = 60$$

これを解いて, $p^* = 3/2$.

- (3) (11) 式を, (1), (2), (10) 式に代入すると,

$$\begin{aligned} (x_1^{A*}, x_2^{A*}) &= (40, 60) \\ (x_1^{B*}, x_2^{B*}) &= (20, 30) \end{aligned}$$

- (4) 初期賦存量と, 最適消費量を比較する. 個人 A は, リンゴ 20 個と交換に, みかん 30 個を手に入れた. 個人 B は, みかん 30 個と交換に, リンゴ 20 個を手に入れた.

リンゴ 1 個は, みかん 1.5 個分の価値がある. この 1.5 というのが, リンゴの相対価格 $p^* = p_1/p_2$ である.

花子「上付き, 下付きでくらくらするね」

太郎「ワルラス法則ってちょっとかつこいい」
