第 3 講　公共財 (2) 自発的供給（テキスト p.122–132）

先生「今日は，例題を解きながらサミュエルソンルールとリンダール均衡を説明します」
花子「唐突！」
太郎「また方程式 5 本 !?」

例題

1 私的財，1 公共財，2 個人（花子，太郎）からなる経済を考える．効用関数を，

$$
\begin{aligned}
u^A &= x^A Y \\
u^B &= x^B Y
\end{aligned} \tag{1}
$$

とする．上付きの A は花子を，上付きの B は太郎を表す．x は私的財消費，Y は公共財を表す．たとえば，x^A は花子の私的財消費を表す．

私的財の総量を 600，公共財生産の限界費用を 2 とすると，資源制約式は，

$$600 = x^A + x^B + 2Y \tag{2}$$

と表せる．

(1) 花子にとっての公共財の価値を表す限界代替率 MRS^A を，x^A, Y を用いて表せ．
(2) サミュエルソンルールを用いて，公共財の最適水準 Y^* を求めよ．

私的財の総量 600 のうち，花子が 360，太郎が 240 保有しているとする．公共財の価格が限界費用 2 に等しいとすると，花子と太郎の予算制約式はそれぞれ，

$$360 = x^A + 2y^A \tag{3}$$
$$240 = x^B + 2y^B \tag{4}$$

と表せる．ここで，y^A, y^B は花子と太郎が自発的に購入する公共財を表している．

また公共財の性質より，

$$y^A + y^B = Y \tag{5}$$

が成り立つ．

(3) 花子のナッシュ反応関数 $y^A = v^A(y^B)$ を求めよ．
(4) 太郎のナッシュ反応関数 $y^B = v^B(y^A)$ を求めよ．
(5) 平面 (y^A, y^B) 上に，2 本のナッシュ反応曲線を図示せよ．
(6) ナッシュ均衡 $(\hat{y}^A, \hat{y}^B)$ を求めよ．また，$\hat{Y} = \hat{y}^A + \hat{y}^B$ と (2) の最適水準 Y^* を比較せよ．

経済にせり人を追加したリンダールメカニズムを考える．花子の負担率を τ，太郎の負担率を $(1-\tau)$ とする．花子と太郎の予算制約式はそれぞれ，

$$360 = x^A + 2\tau Y^A \tag{6}$$
$$240 = x^B + 2(1-\tau)Y^B \tag{7}$$

となる．ただし，Y^A は花子が申告する公共財の水準を，Y^B は太郎が申告する公共財の水準を表している．

(7) 花子のリンダール反応関数 $Y^A = l^A(\tau)$ を求めよ．

(8) 太郎のリンダール反応関数 $Y^B = l^B(1-\tau)$ を求めよ．

(9) ヨコ軸を公共財 Y，タテ軸を τ として，2 本のリンダール反応曲線を図示せよ．

(10) リンダール均衡 $(\bar{\tau}, \bar{Y})$ を求めよ．また，$\bar{Y}$ と (2) の最適水準 Y^* を比較せよ．

解答

(1) 花子にとっての公共財の価値は，

$$MRS^A = \frac{u_Y^A}{u_x^A} = \frac{x^A}{Y} \tag{8}$$

(2) 限界費用が 2 なので，サミュエルソンルールは，

$$MRS^A + MRS^B = 2$$

(8) 式より，

$$\frac{x^A}{Y} + \frac{x^B}{Y} = 2 \quad \Rightarrow \quad x^A + x^B = 2Y \tag{9}$$

(2), (9) 式より，最適水準は，$Y^* = 150$.

(3) 花子の問題は，次のように定式化される．

$$\max_{x^A,\, y^A} \; u^A = x^A(y^A + y^B) \quad \text{subject to} \quad 360 = x^A + 2y^A$$

1 階の条件は，

$$MRS^A = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^A}{y^A + y^B} = 2 \tag{10}$$

(3), (10) 式を用いて，x^A を消去すると，花子の反応関数が得られる．

$$y^A = 90 - \frac{1}{2}y^B \tag{11}$$

(4) 太郎の問題は，次のように定式化される．

$$\max_{x^B,\, y^B} \; u^B = x^B(y^A + y^B) \quad \text{subject to} \quad 240 = x^B + 2y^B$$

1 階の条件は，

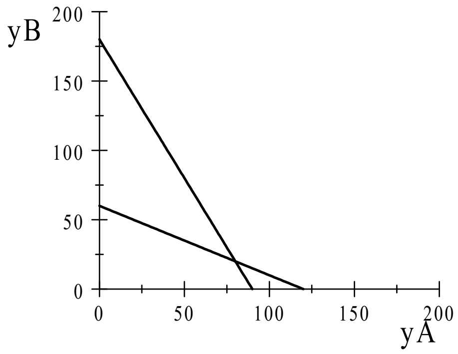
$$MRS^B = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^B}{y^A + y^B} = 2 \tag{12}$$

(4), (12) 式を用いて，x^B を消去すると，太郎の反応関数が得られる．

$$y^B = 60 - \frac{1}{2}y^A \tag{13}$$

(5) (11), (13) 式を平面 (y^A, y^B) に図示する．

図 1. ナッシュ反応曲線



(6) ナッシュ均衡は，$(\hat{y}^A, \hat{y}^B) = (80, 20)$．公共財の水準は，$\hat{Y} = \hat{y}^A + \hat{y}^B = 100$．$Y^* = 150$ よりも少ない．

(7) 花子の問題は，次のように定式化される．

$$\max_{x^A,\, Y^A} u^A = x^A Y^A \quad \text{subject to} \quad 360 = x^A + 2\tau Y^A$$

1 階の条件は，

$$MRS^A = 2\tau \Rightarrow \frac{x^A}{Y^A} = 2\tau \tag{14}$$

(6), (14) 式より，花子のリンダール反応関数が得られる．

$$Y^A = \frac{90}{\tau} \tag{15}$$

(8) 太郎の問題は，次のように定式化される．

$$\max_{x^B,\, Y^B} u^B = x^B Y^B \quad \text{subject to} \quad 240 = x^B + 2(1-\tau) Y^B$$

1 階の条件は，

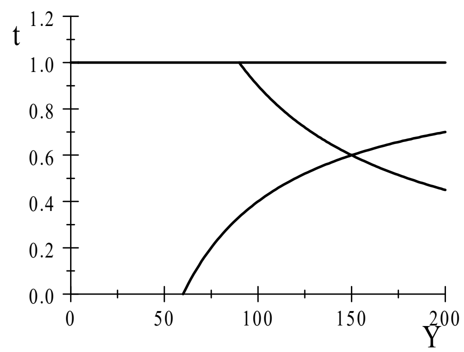
$$MRS^B = 2(1-\tau) \quad \Rightarrow \quad \frac{x^B}{Y^B} = 2(1-\tau) \tag{16}$$

(7), (16) 式より，太郎のリンダール反応関数が得られる．

$$Y^B = \frac{60}{1-\tau} \tag{17}$$

(9) (15), (17) 式を，平面 (Y, τ) 上に図示する（$0 \leqq \tau \leqq 1$ に注意する）．

図 2. リンダール反応曲線



(10) リンダール均衡は，$(\bar{\tau}, \bar{Y}) = (0.6, 150)$．$\bar{Y} = Y^* = 150$ が成り立つ．

花子「難しい！でも，先生の言いたいことは分かったような」
太郎「普通の連立方程式で良かった」
