

第 10 講 所得再分配 (2) 格差の指標の補足：期待効用と確実性等価

先生「10% の確率で 100 万円が当たるくじがあります。いくらなら買ってもよいと思いますか」

太郎「そりゃ 10 万円でしょ」

花子「私は 3 万円かな」

1. くじ

確率 α_1 で x_1 円, 確率 α_2 で x_2 円が当たるくじがあるとする ($\alpha_1 + \alpha_2 = 1$)。くじは, 表あるいは図で表現できる【板書】

くじの (数学的) 期待値は,

$$x^e = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

である。

2. 期待効用

このくじに対する期待効用 (expected utility) を,

$$EU = \alpha_1 U(x_1) + \alpha_2 U(x_2) \quad (1)$$

と定義する。 $U(x)$ は, 確実な所得 x 円が得られるときの効用を表す。 (1) 式は, 個人は不確実な状況で, 所得の期待値ではなく, 効用の期待値に関心を持つと仮定している。 期待効用仮説という。

例 10% の確率で 100 万円が当たるくじがある。 効用関数を $U(x) = \sqrt{x}$ とすると, このくじの期待効用は,

$$0.1 \times \sqrt{1000000} + 0.9 \times \sqrt{0} = 100$$

3. くじの私的な価格 (確実性等価)

くじの期待効用と同じ効用水準を与える確実な所得を x^* とする。

$$\alpha_1 U(x_1) + \alpha_2 U(x_2) = U(x^*) \quad (2)$$

x^* は, くじのために払ってもよいと思う価格 (の最大値) を表している。 **確実性等価** (certainty equivalent) という。

例 上の例では, $100 = \sqrt{x^*}$ より, $x^* = 10000$ 円。

例題

10% の確率で 100 万円が当たるくじがある。 花子は確実な所得 x 円に対して $U(x) = x^{\frac{2}{3}}$ の効用を得るとする。 花子が払ってもよいと思う, くじの最高価格 (確実性等価) を求めよ。 ただし, 必要に応じて, $\sqrt{10} = 3.16$ を用いよ。

解答

(2) 式より,

$$0.1 \times 1000000^{\frac{2}{3}} + 0.9 \times 0^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$$

ここで,

$$0.1 \times 1000000^{\frac{2}{3}} = 10^3$$

したがって,

$$x^{\frac{2}{3}} = 10^3 \Leftrightarrow x = (10^3)^{\frac{3}{2}} = 10^{4.5} = 10000\sqrt{10} = 31600$$

確実性等価は, 31,600 円。

…(答)

4. 図による理解【板書】

作図の仕方

- (1) ヨコ軸上に x_1, x_2 をとる.
- (2) タテ軸上に $U(x_1), U(x_2)$ をとる.
- (3) 内分点 $\alpha_1 U(x_1) + \alpha_2 U(x_2)$ をタテ軸上にとる¹.
- (4) 右にいて、曲線から下に下ろしたところが、確実性等価 x^* .
- (5) 右にいて、線分 $A_1 A_2$ との交点 E から下に下ろしたところが、期待値 $x^e = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$.²

効用関数 $U(x)$ の性質により、個人のリスクに対する態度を分類できる.

リスク回避的 (risk averse) $\Leftrightarrow U''(x) < 0$ (上に凸)

リスク中立的 (risk neutral) $\Leftrightarrow U''(x) = 0$ (直線)

リスク愛好的 (risk loving) $\Leftrightarrow U''(x) > 0$ (下に凸)

(理由) 図より、期待値 x^e と確実性等価 x^* の大小関係は次のように分類できる.

リスク回避的 $\Leftrightarrow x^* < x^e$

リスク中立的 $\Leftrightarrow x^* = x^e$

リスク愛好的 $\Leftrightarrow x^* > x^e$

リスク中立的な個人は、期待値 x^e でくじを買ってもよいと考える. リスク回避者は期待値 x^e では買わない. リスク愛好者は、期待値よりも高い価格を払ってもよいと考える. 言葉と整合的.

5. リスクプレミアム

ある個人が、10% の確率で 100 万円が当たるくじを持っている. 効用関数が $U(x) = \sqrt{x}$ のとき、彼は、確実性等価 $x^* = 10000$ 円でくじを売ってもよいと考える (はず).

くじを購入する経済主体を、保険会社と呼ぼう. 保険会社は、大量のくじを個人から購入することで、くじ 1 本あたり平均して、 $x^e - x^* = 90000$ 円儲けることができる. 差額 ($x^e - x^*$) を、**リスクプレミアム**という.

取引の前後で、個人は無差別. 保険会社の利潤の分だけ社会的余剰が増える. 保険は、経済厚生を改善する制度である.

問題

確率 $\frac{1}{3}$ で 160,000 円、確率 $\frac{2}{3}$ で 10,000 円が当たるくじがある.

(1) 花子は確実な所得 x 円に対して $U(x) = \sqrt{x}$ の効用を得るとする. 花子が払ってもよいと思う、くじの最高価格 (確実性等価) を求めよ.

(2) 花子がこのくじを所有しているとする. リスク中立的な経済主体は、(1) の価格でくじを購入することで利益を得る. 期待利益の大きさ (リスクプレミアム) を求めよ.

(1) 40,000 円 (2) 20,000 円

花子「私の効用関数が、先生にバレた」

太郎「リスクプレミアムって、ちょっとカッコいい」

¹数直線上に 2 点 $A(a)$, $B(b)$ をとる. 線分 AB を、 $t: (1-t)$ に内分する点を $C(c)$ とすると、 $c = (1-t)a + tb$ が成り立つ.

²中点連結定理を復習してください.