

第 14 講 ゲームの理論 (2) 展開型ゲーム (テキスト p.345-358)

先生「逐次手番ゲーム, Extensive form game を説明します. あと, 繰返しゲームも」

太郎「将棋かな?面白そう」

花子「私, ルール知らない」

1. 手番のあるナッシュ均衡

		太郎			
		男 映画		サッカー	
花子	映画	100, 50	20, -10		
	サッカー	0, 0	50, 100		

前回紹介した男女の争いゲームに手番を導入する. 最初に, 花子が映画, サッカーのいずれかを選ぶ. 次に太郎が, 花子の選択に応じて, 映画, サッカーのいずれかを選択する. 利得が確定する. ゲームの構造は樹形図で表現できる. プレーヤーが選択する場所に点 (node) を記入する. 利得は, 上が先手番の花子, 下が後手番の太郎である. 【図 1】

後手番の太郎の立ち位置は, 先手番の花子の選択に依存する. 花子が映画を選択したときの太郎を P 太郎, 花子がサッカーを選択したときの太郎を Q 太郎とする. 太郎の戦略とは, 単なる映画, サッカーの選択ではない. P 太郎の選択と Q 太郎の選択をペアにして, すべての可能性を書き尽くさなければならない. たとえば, P 太郎が映画, Q 太郎がサッカーを選択するという戦略を, (映, サ) と表記するとしよう. 太郎の戦略は 4 通り. ゲームは次のような標準型ゲームとして表現できる.

【図 2】は, 花子が映画, 太郎が (サ, サ) を選択したことを表す (映画, (サ, サ)) を図示したものである.

		太郎			
		(映, 映)	(映, サ)	(サ, 映)	(サ, サ)
花子	映画	100, 50			20, -10
	サッカー				50, 100

問題 1

利得表を完成し, ナッシュ均衡を求めよ.

解答

利得表は次の通り.

		太郎			
		(映, 映)	(映, サ)	(サ, 映)	(サ, サ)
花子	映画	100, 50	100, 50	20, -10	20, -10
	サッカー	0, 0	50, 100	0, 0	50, 100

花子目線: 1 列では映画 (100 に下線), 2 列では映画 (100 に下線), 3 列では映画 (20 に下線), 4 列ではサッカー (50 に下線).

太郎目線: 1 行では (映, 映) または (映, サ) (ともに 50 に下線). 2 行では (映, サ) または (サ, サ) (ともに 100 に下線).

2 つの数字に下線が引かれているマスを調べると, (映画, (映, 映)), (映画, (映, サ)), (サッカー, (サ, サ)) の 3 つ. ...(答)

2. 信用されない脅し

(サッカー, (サ, サ)) はナッシュ均衡である。いったん均衡が達成されると、花子も太郎も戦略を変える誘因を持たないから。しかし、この均衡は現実的だろうか。太郎の(サ, サ)戦略は、一種の脅しである。花子が脅しを信じれば、サッカーを選んでくれる。しかし、花子が映画を選び、太郎の立ち位置が点 P で確定したとすると、戦略(サ, サ)はもはや脅しとして通用しない。信用されない脅し (incredible threat) という。均衡概念を改良した方がよい。

3. 部分ゲーム完全均衡 (p.351)

樹形図を下から部分に分けて最適戦略を導出する。 P 太郎の選択は映画, Q 太郎の選択はサッカー。太郎の最適戦略は(映, サ)である。このとき、花子の最適戦略は映画である。均衡は、(映画, (映, サ)) の1つ。部分ゲーム完全均衡 (subgame perfect equilibrium) という。後手番のプレーヤーから順に問題を解いていく方法を、後ろ向き帰納法 (backward induction) という¹。【図3】は、部分ゲーム完全均衡を図示したものである。

問題 2 (ゼロ和ゲーム)

		花子	
		遊ぶ	遊ばない
太郎	遊ぶ	40, -40	-10, 10
	遊ばない	-30, 30	20, -20

太郎を先手番、花子を後手番とする。樹形図を作成し、部分ゲーム完全均衡を求めよ。

解答

樹形図は【図4】。部分ゲーム完全均衡は、(遊ぶ, (遊ばない, 遊ぶ)) の1つ。²

4. 繰返しゲーム (p.355)

		太郎	
		協調 C	非協調 N
花子	協調 C	100, 100	0, 150
	非協調 N	150, 0	50, 50

花子と太郎が、協調 C 、非協調 N を選択する同時手番ゲームを考える。ナッシュ均衡は (N, N) 。望ましい均衡 (C, C) は達成されない。世の中そんなに非協調ばかりだろうか。そうは思わない。日本人は助け合って生きている。囚人のジレンマを解消するアイデアはないか。

上のゲームを何度も繰り返すゲームを考える。以下の戦略を仮定する³。

- (1) 相手が協調すれば、こちらも協調する。
- (2) 相手が非協調を選択したら、次回からはずっと非協調を選択する。

【図5】最初の状態を (C, C) とする。この状態は、将来的に維持されるだろうか。結論は、個人が将来をどのくらい重視するかに依存する。割引因子を $0 < \delta < 1$ とする。

¹第9講のシュタッケルベルク均衡を参照せよ。

²後手番が得をするゲームもある。second mover advantage という。

³しっぺ返し戦略、あるいは、トリガー戦略という。

(C, C) が繰返される時、利得の割引現在価値の合計は、

$$100 + 100\delta + 100\delta^2 + \dots = \frac{100}{1 - \delta}$$

である。

非協調を選択し、短期的に大きな利得を得たのち、 (N, N) が繰返される時、利得の割引現在価値の合計は、

$$150 + 50\delta + 50\delta^2 + \dots = 100 + \frac{50}{1 - \delta} = \frac{150 - 100\delta}{1 - \delta}$$

である。上の方が大きくなるのは、

$$100 > 150 - 100\delta \Rightarrow \frac{1}{2} < \delta < 1 \quad (1)$$

のとき。(1)式が満たされる時、花子も太郎も協調関係を壊す誘因を持たない。 (C, C) は維持される⁴。 δ が大きいとは、将来を重視するということである。目先の利益にとらわれず、将来を重視する姿勢を持ちましょう。

補足

1. 割引因子

現在の1万円と1年後の1万円は同じではない。年利5%の投資機会があるとする。現在の1万円は、1年後に1.05万円になる。ということは、1年後の1万円は、現在だと $\frac{1}{1.05}$ 万円の価値のほず。一般に、年利が r のとき、1年後の1万円は、現在の $\frac{1}{1+r}$ 万円と同じとみなすことができる。割引現在価値という。 r を割引率、 $\delta = \frac{1}{1+r}$ を割引因子という。

2. 等比数列とその和

初項 a 、公比 r の等比数列の一般項は、 $a_n = ar^{n-1}$ と表せる。初項から第 n 項までの和を S_n とおくと、

$$S_n = \begin{cases} \frac{a(1-r^n)}{1-r} & \text{if } r \neq 1 \\ na & \text{if } r = 1 \end{cases}$$

が成り立つ。

次に、 n が十分大きいケースを考える。 $0 < r < 1$ と仮定する。 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ である。したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r} \quad (2)$$

が成り立つ^{5,6}。利得の割引現在価値の総和は、(2)式を用いて計算できる。

花子「週末、映画観にいかない？」

太郎「喜んで」

⁴フォーク定理 (Folk theorem) という。まあ、そうだよな、という意味。

⁵等比数列の無限和を、無限等比級数という。

⁶(別解)私の中に私がいる、を利用する。無限和が存在すると仮定する。

$$\begin{aligned} S &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots \\ &= a + r(a + ar + ar^2 + \dots) \\ &= a + rS \end{aligned}$$

したがって、

$$S = \frac{a}{1-r}$$

図1. 樹形図

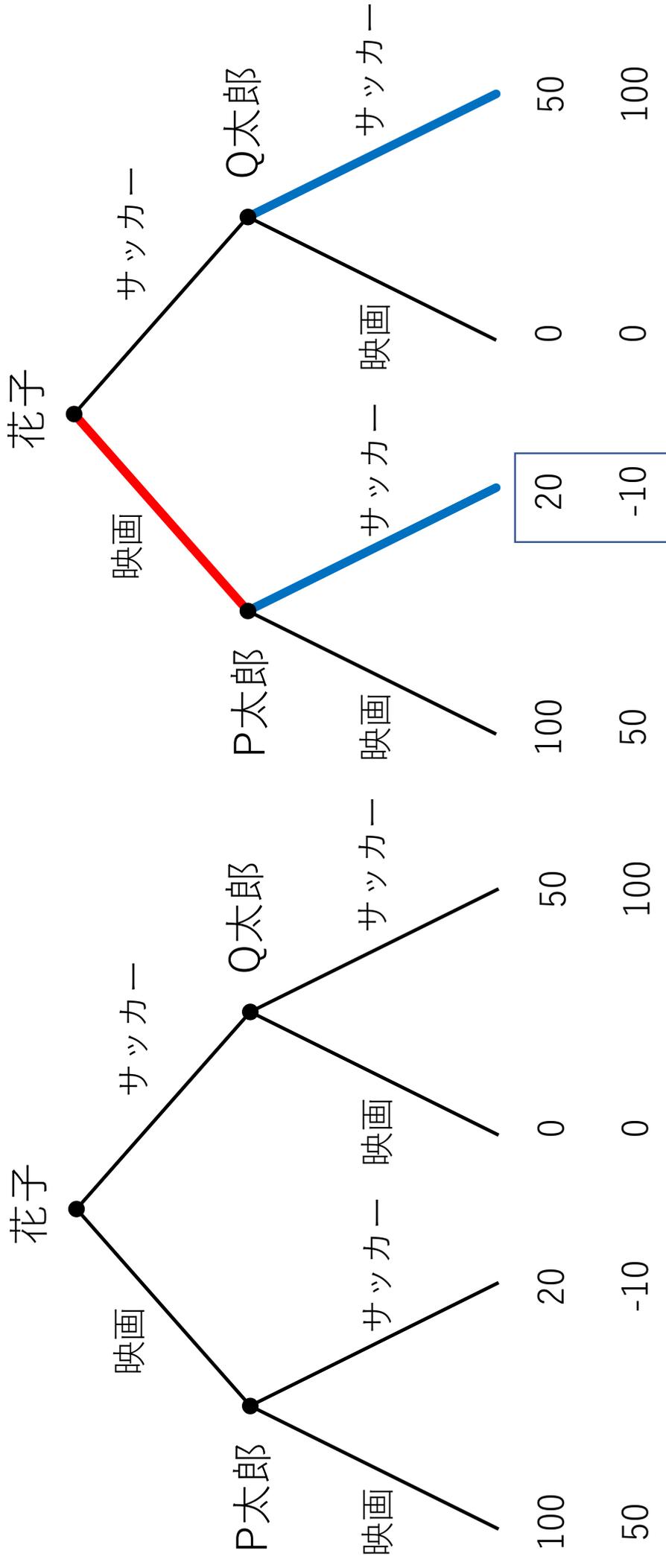


図2. (映画, (サ, サ))

図3. 部分ゲーム完全均衡

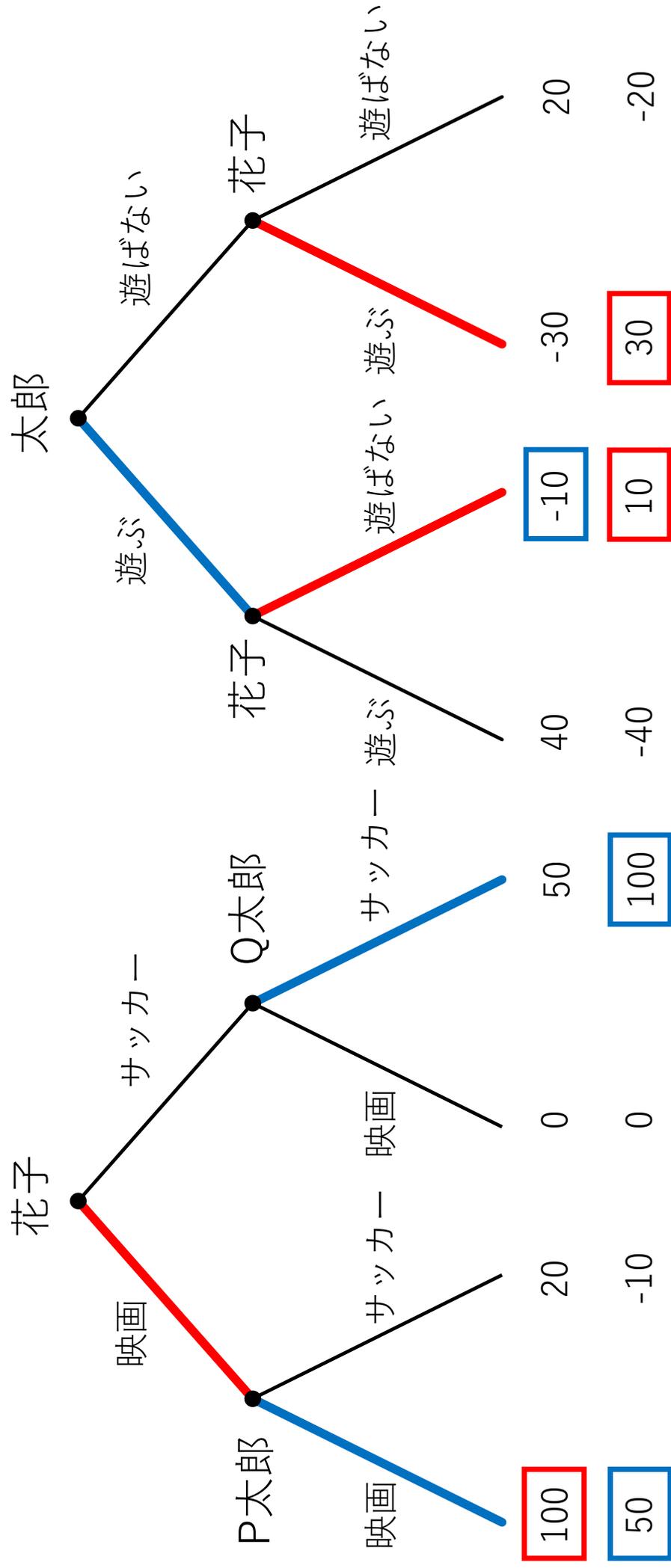


図4. 樹形図

