

第 13 講 ゲームの理論 (1) 標準型ゲーム (テキスト p.335-345)

先生「同時手番ゲームを説明します。Normal form game と言います」

太郎「ゲームだって。面白そう」

花子「何だか難しそう」

例 1 囚人のジレンマ

共犯の疑いのある 2 人の囚人が、別々に取り調べを受けている。2 人がともに自白すると、刑期はともに 7 年。ともに黙秘すると、ともに 1 年。一方が自白し、もう一方が黙秘すると、自白した人は釈放され、黙秘した人は刑期が 10 年になる¹。以上のルールを囚人たちが知っているとき、彼らは自白するか、あるいは黙秘するか。

		囚人 B	
		自白	黙秘
囚人 A	自白	-7, -7	0, -10
	黙秘	-10, 0	-1, -1

刑期（負の利得）を行列を用いて表す。利得行列という。左が囚人 A の利得、右が囚人 B の利得を表す。相手とのコミュニケーションが取れないので、相手の行動を所与として、最適な行動を選択する²。相手が自白するならば自白する。相手が黙秘するならば自白する。最適反応は、いずれの場合も自白。ナッシュ均衡は（自白，自白）。囚人たちの最適な状態（黙秘，黙秘）は実現しない。

問題 1 男女の争い (battle of the sexes)

花子と太郎が休日にデートに行く。花子は、できれば映画を観にいきたい。太郎は、できればサッカーを観にいきたい。利得表は次の通り。ナッシュ均衡を求めよ。

		太郎	
		映画	サッカー
花子	映画	100, 50	20, -10
	サッカー	0, 0	50, 100

解答

(映画, 映画), (サッカー, サッカー) の 2 つ。ただし、左の要素が花子の戦略（選択）を、右が太郎の戦略を表す。

(考え方)

まず、花子の立場で考える。太郎が映画を選ぶとする。1 列に注目。喜んで映画 (100 に下線を引く)。太郎がサッカーを選ぶとする。2 列に注目。20 と 50 なので、サッカー (50 に下線を引く)

次に、太郎の立場で考える。花子が映画を選ぶとする。1 行に注目。50 と -10 なので、サッカー (50 に下線を引く)。花子がサッカーを選ぶとする。2 行に注目。喜んでサッカー (100 に下線を引く)。

4 つのマスの中で、2 つの数字に下線が引かれているのがナッシュ均衡。

標準型ゲームは、(1) プレーヤー、(2) 戦略、(3) 利得から構成される³。均衡とは均衡戦略のことである。

¹司法取引という。

²第 8 講のクールノー均衡を参照せよ。

³行動の選択と戦略は厳密には異なる。この点は次回説明する。

例 2 マクシミン戦略 (p.340)

戦略にもいろいろある。もう一度、男女の争いモデルを考えよう。花子はビビリである。つつい最悪のシナリオを考えてしまう。自分が映画を選択したときの最悪の利得は 20 である。サッカーを選択したときの最悪は 0。最悪の状態を避けたいので、映画を選択する。太郎もビビリである。最悪のシナリオは、自分がサッカー、花子が映画を選んだときの利得 -10 である。したがって、太郎は映画を選択する。均衡は (映画, 映画) である。最悪を避ける戦略を、マクシミン戦略という⁴。

例 3 ゼロ和ゲーム (p.341)

プレーヤーの利得の合計が一定であるとき、一方が得をすれば他方は損をする。ゼロ和ゲームという。

		花子	
		遊ぶ	遊ばない
太郎	遊ぶ	40, -40	-10, 10
	遊ばない	-30, 30	20, -20

太郎は、遊ぼっていうと遊ぼっていう。遊ばないっていうと遊ばないっていう。真似するのが好き。花子は、遊ぼっていうと遊ばないっていう。遊ばないっていうと遊ぼっていう。あまのじゃく、へそ曲がり。

問題 2

- (1) ナッシュ均衡は存在しないことを示せ。
- (2) マクシミン戦略での均衡を求めよ。
- (3) (2) の均衡は安定的ではないことを示せ。

解答

(1) 太郎目線の下線は、40 と 20 にある。花子目線の下線は、10 と 30 にある。2つの数字に下線が引かれているマスがない。

(2) 太郎は、最悪の利得 -30 を避けたい。遊ぶを選ぶ。花子は、最悪の利得 -40 を避けたい。遊ばないを選ぶ。マクシミン戦略での均衡は、(遊ぶ, 遊ばない)。

(3) 最初、(遊ぶ, 遊ばない) の状態にあるとする。花子は満足。でも太郎はつまらない。花子が遊ばないっていうなら遊ばないっていう。均衡が (遊ばない, 遊ばない) に移動する。

新しい均衡に太郎は満足。でも花子は気に入らない。太郎が遊ばないっていうなら遊ぼっていう。私はあまのじゃく。均衡が (遊ばない, 遊ぶ) に移動する。

右上の均衡から始まって、右下、左下へと移動した。移動は止まらない。時計回りにいつまでも続く。ということは、安定的ではない。

例 4 混合戦略 (p. 344)

確率 1 で戦略の 1 つを選ぶことを、純粋戦略という。1 以下の確率で、ランダムに戦略を選ぶことを、混合戦略という。

上のゼロ和ゲームにおいて、太郎が遊ぶを選択する確率を a 、花子が遊ぶを選択する確率を b とする ($0 \leq a, b \leq 1$)。

		花子	
		遊ぶ (b)	遊ばない ($1 - b$)
太郎	遊ぶ (a)	40, -40	-10, 10
	遊ばない ($1 - a$)	-30, 30	20, -20

⁴プレーヤー 1 の行動を、 $\max_{x_1} \min_{x_2} u_1(x_1, x_2)$ と書くことができるのでマクシミンという。

太郎の期待利得を π_A とすると,

$$\begin{aligned}\pi_A &= 40ab - 10a(1-b) - 30(1-a)b + 20(1-a)(1-b) \\ &= (100b - 30)a + 20 - 50b\end{aligned}$$

である.

太郎の問題は, 次のように定式化される.

$$\max_{0 \leq a \leq 1} \pi_A = (100b - 30)a + 20 - 50b \quad (1)$$

a の係数 $(100b - 30)$ に注目する. 係数が正ならば, (1) 式は右上がりの直線を表す. π_A が最大となるのは, $a = 1$ のとき. 係数が負ならば, 右下がりの直線. $a = 0$ で最大. 係数がゼロのときは水平線を表す. どんな a でも良い.

以上をまとめると,

$$a^* = \begin{cases} 1 & b > 0.3 \\ \text{any} & \text{if } b = 0.3 \\ 0 & b < 0.3 \end{cases} \quad (2)$$

が得られる. 【図1】は, 平面 (a, b) 上の正方形の内部に, (2) 式を図示したものである.

花子の期待利得 π_B は,

$$\begin{aligned}\pi_B &= -40ab + 10a(1-b) + 30(1-a)b - 20(1-a)(1-b) \\ &= (50 - 100a)b + 30a - 20\end{aligned}$$

上と同様にして, b の係数 $(50 - 100a)$ の符号で場合分けして, 最適な b を求める.

$$b^* = \begin{cases} 1 & a < 0.5 \\ \text{any} & \text{if } a = 0.5 \\ 0 & a > 0.5 \end{cases} \quad (3)$$

(3) 式を図示すると 【図2】 になる.

(2) 式は太郎の反応関数を, (3) 式は花子の反応関数を表す. 2つの反応曲線を, 平面 (a, b) 上の正方形の内部に図示する 【図3】. 反応曲線の交点は $E(0.5, 0.3)$ である. いったん点 E が達成されると, 太郎も花子も行動を変える誘因を持たないので, ナッシュ均衡である. 一般に, 純粋戦略均衡が存在しない場合でも, 混合戦略まで考えれば, 均衡が存在することが知られている.

補足

太郎の反応曲線は右上がり. なぜか. b が大きいとは, 花子が遊ぼっていう可能性が高いという意味. そういうとき, 真似っこ太郎は遊ぼっていいたい. つまり, a を大きくする.

花子の反応曲線は右下がり. a が大きいということは, 太郎が遊ぼっていう可能性が高い. そういうとき, あまのじゃく花子は遊ばないっていいたい. つまり, b を小さくする. 反応曲線には, プレーヤーの性格が隠されている.

太郎「今度の週末, サッカー観にいかない？」

花子「映画に決まってるじゃない」

(続く)

図1. 太郎の反応曲線

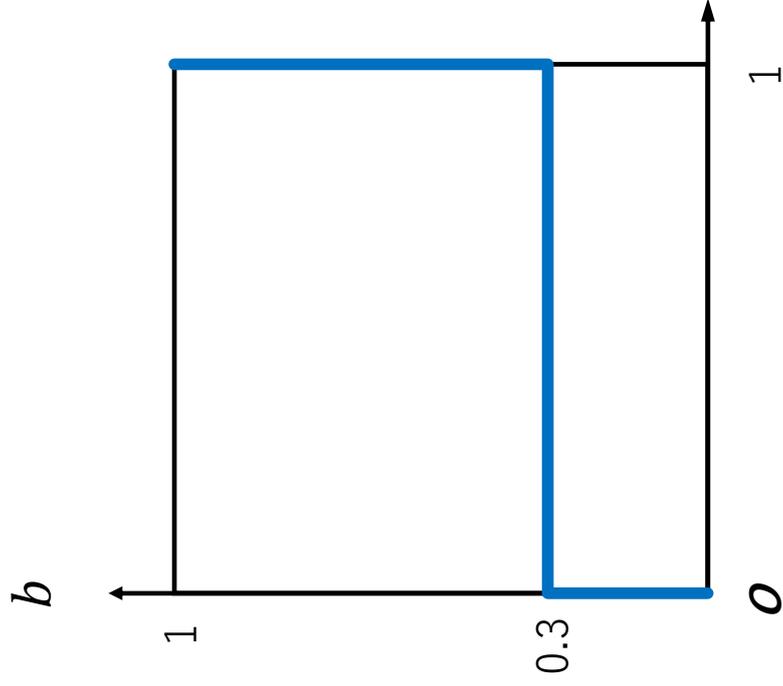


図2. 花子の反応曲線

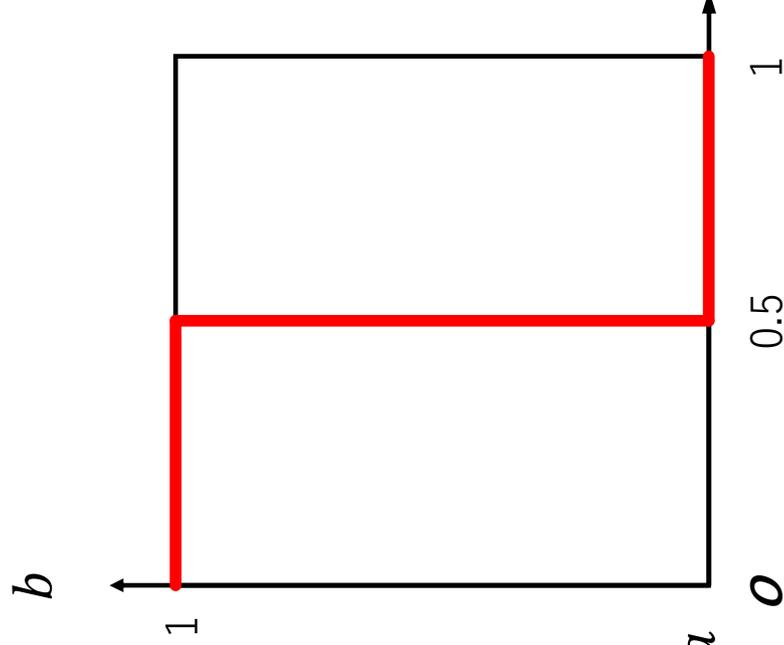


図3. ナッシュ均衡

