

第 10 講 公共経済 (1) 公共財 (テキスト p.232-238)

太郎「もうすぐお正月だね」

花子「もち米を持ち寄って鏡もちを作るっか」

キーワード：非競合性と排除不可能性¹

リンゴが 1 つある。太郎が食べたなら花子は食べることができない。競合している。

対価を払わないとリンゴを食べることができない。支払の有無により消費の機会を排除できる。

排除できるか

		no	yes
競合するか	no	純粋公共財	クラブ財
	yes	コモンズ	私的財

1. 社会的最適

問題 1

花子 (A) と太郎 (B) は私的財消費と公共財から効用を得る。花子と太郎の効用関数を、

$$\begin{aligned} u^A &= U(x^A, z) = \log x^A + \frac{1}{4} \log z \\ u^B &= U(x^B, z) = \log x^B + \frac{1}{4} \log z \end{aligned} \quad (1)$$

とする。 x^A は花子の私的財、 x^B は太郎の私的財、 z は公共財を表す。

2 単位の私的財で 1 単位の公共財が生産できるとする。私的財の総量を 100 とすると、資源制約式は次式で与えられる。

$$100 = x^A + x^B + 2z \quad (2)$$

このとき、総効用 ($u^A + u^B$) を最大にする (x^A, x^B, z) を求めよ。

解答

次の最適化問題を解けばよい。

$$\max_{x^A, x^B, z} u^A + u^B = \log x^A + \log x^B + \frac{1}{2} \log z \quad \text{subject to} \quad 100 = x^A + x^B + 2z$$

解法 1 z を消去する。

$$\max_{x^A, x^B} u^A + u^B = \log x^A + \log x^B + \frac{1}{2} \log \left(50 - \frac{x^A + x^B}{2} \right)$$

最適化条件は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^A} (u^A + u^B) &= \frac{1}{x^A} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{50 - \frac{x^A + x^B}{2}} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^B} (u^A + u^B) &= \frac{1}{x^B} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{50 - \frac{x^A + x^B}{2}} = 0 \end{aligned}$$

明らかに、 $x^A = x^B$ 。このとき、

$$\frac{1}{x^A} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{50 - x^A}$$

これを解いて、 $x^A = x^B = 40$ 。 (2) 式より、 $z = 10$ 。

... (答)

¹Samuelson PA (1954) The pure theory of public expenditure. *Review of Economics and Statistics*. 36(4): 387-389.

解法 2 ラグランジュ未定乗数法

ラグランジュ関数を,

$$L = \log x^A + \log x^B + \frac{1}{2} \log z + \lambda(100 - x^A - x^B - 2z)$$

とおく ($\lambda > 0$ はラグランジュ乗数) .

最適化条件は,

$$\frac{\partial L}{\partial x^A} = \frac{1}{x^A} - \lambda = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^B} = \frac{1}{x^B} - \lambda = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{1}{2z} - 2\lambda = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - x^A - x^B - 2z = 0 \quad (6)$$

4 つの変数 x^A, x^B, z, λ について 4 本の方程式があるので解ける.

(3), (4), (5) 式より, $x^A = x^B = \frac{1}{\lambda}, z = \frac{1}{4\lambda}$. これらを (6) 式に代入する.

$$100 = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} = \frac{5}{2\lambda}$$

この式から, $\lambda = \frac{1}{40}$ を得る. したがって, $(x^A, x^B, z) = (40, 40, 10)$... (答)

2. パレート最適 (パレート効率)

ある配分を変更することで, (1) 誰も損をせず, (2) 少なくとも 1 人が得をするとき, この変更はパレート改善であるという. これ以上パレート改善できないような配分を, パレート最適という (テキスト 151 ページ) .

問題 2

上の問題で, パレート最適な配分を求めよ.

解答

太郎の効用水準を u で固定する. 次の問題を解けばよい.

$$\max_{x^A, x^B, z} u^A = \log x^A + \frac{1}{4} \log z \quad \text{subject to} \quad \begin{cases} 100 = x^A + x^B + 2z \\ u = \log x^B + \frac{1}{4} \log z \end{cases}$$

ラグランジュ関数を,

$$L = \log x^A + \frac{1}{4} \log z + \lambda(100 - x^A - x^B - 2z) + \mu \left(\log x^B + \frac{1}{4} \log z - u \right)$$

とおく ($\lambda > 0, \mu > 0$ はラグランジュ乗数) .

最適化条件は,

$$\frac{\partial L}{\partial x^A} = \frac{1}{x^A} - \lambda = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^B} = -\lambda + \frac{\mu}{x^B} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{1}{4z} - 2\lambda + \frac{\mu}{4z} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - x^A - x^B - 2z = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \log x^B + \frac{1}{4} \log z - u = 0 \quad (11)$$

5 つの変数 $x^A, x^B, z, \lambda, \mu$ について 5 本の方程式があるので解ける.

(7) 式より, $\lambda = \frac{1}{x^A}$. これを (8) 式に代入すると, $\mu = \frac{x^B}{x^A}$. λ と μ を (9) 式に代入する.

$$\frac{1}{4z} - \frac{2}{x^A} + \frac{x^B}{4zx^A} = 0 \Rightarrow x^A - 8z + x^B = 0$$

この式と (10) 式より, $z^* = 10$, $x^{A*} + x^{B*} = 80$ を得る.

最後に (11) 式から, 太郎の私的財が得られる.

$$\log x^B = u - \log 10^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x^{B*} = \frac{e^u}{10^{\frac{1}{4}}}$$

花子の私的財は $x^{A*} = 80 - x^{B*}$ である. 太郎の効用水準 u を上げると, x^{B*} が増え, x^{A*} が減る. 公共財は 10 で一定である.

一般解を求めよう.

$$\max_{x^A, x^B, z} u^A = U^A(x^A, z) \quad \text{subject to} \quad \begin{cases} 100 = x^A + x^B + 2z \\ u = U^B(x^B, z) \end{cases}$$

ラグランジュ関数

$$L = U^A(x^A, z) + \lambda (100 - x^A - x^B - 2z) + \mu [U^B(x^B, z) - u]$$

最適化条件

$$\frac{\partial L}{\partial x^A} = \frac{\partial U^A}{\partial x^A} - \lambda = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^B} = -\lambda + \mu \frac{\partial U^B}{\partial x^B} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial U^A}{\partial z} - 2\lambda + \mu \frac{\partial U^B}{\partial z} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - x^A - x^B - 2z = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = U^B(x^B, z) - u = 0 \quad (16)$$

(12) 式より, $\lambda = \frac{\partial U^A}{\partial x^A}$. これを (13) 式に代入すると, $\mu = \frac{\frac{\partial U^A}{\partial x^A}}{\frac{\partial U^B}{\partial x^B}}$. λ と μ を (14) 式に代入する.

$$\frac{\partial U^A}{\partial z} - 2 \frac{\partial U^A}{\partial x^A} + \frac{\frac{\partial U^A}{\partial x^A}}{\frac{\partial U^B}{\partial x^B}} \times \frac{\partial U^B}{\partial z} = 0$$

両辺を $\frac{\partial U^A}{\partial x^A}$ で割って整理すると,

$$\frac{\frac{\partial U^A}{\partial z}}{\frac{\partial U^A}{\partial x^A}} + \frac{\frac{\partial U^B}{\partial z}}{\frac{\partial U^B}{\partial x^B}} = 2 \Rightarrow MRS_{XZ}^A + MRS_{XZ}^B = 2 \quad (17)$$

を得る. (15), (16), (17) 式から (x^{A*}, x^{B*}, z^*) が求められる.

MRS_{XZ}^A は, ヨコ軸を公共財 z , タテ軸を私的財 x^A としたときの花子の無差別曲線の接線の傾きの絶対値を表す. 限界代替率という (テキスト 28 ページ). 限界代替率は, 私的財で測った公共財の価値を表す. 右辺の 2 は限界費用を表す².

鏡もちを 1 単位増やしたとしよう. 花子は自分のもち米 MRS_{XZ}^A 単位分の喜びを感じる. 太郎は自分のもち米 MRS_{XZ}^B 単位分の喜びを感じる. 他方, 鏡もちを 1 単位増やすと, 私用のもち米が 2 単位失われる. 悲しい. (17) 式は, 鏡もちを増やすときの総効用が費用と一致する水準で鏡もちのサイズを決めるのが望ましいことを意味している (まあそうだよね).

花子「5 本の連立方程式! ありえへん」

太郎「最後は 1 本だから許す」

²テキストでは, 公共財の生産技術を一般化している. その場合には, 右辺は限界変形率 (Marginal Rate of Transformation, MRT) になる.