第 4 講　企業行動の理論 (3) 生産関数（テキスト p.77–83）

花子「TOEIC 対策してる？」
太郎「うん．7 割は取れると思うけど，9 割取るのは大変そうだなあ」

3.2 節　生産技術と費用

生産要素と生産物の技術的関係を，関数を用いて表現する．生産関数という．

1. 生産要素が 1 つのとき

生産要素の投入量を z，生産量を q とする．生産技術を，

$$q = f(z)$$

という関数で表現する．次の性質がある（図 3.3）．

(1) 右上がり．$f'(z) > 0$

(2) （広域的に）上に凸．$f''(z) < 0$

生産要素を追加的に 1 単位増やすとき，追加的に増える生産量のことを限界生産性 (marginal productivity, MP) という[1]．限界生産性は，生産関数の接線の傾き $f'(z)$ で表される．生産量が増えるにしたがい限界生産性は低下する（$f''(z) < 0$）．限界生産性逓減の法則という．

生産要素の価格と固定費用が与えられれば，生産関数から費用関数を導出することができる．

例題（例 3.2.1）

ある企業の持つ技術が，生産関数

$$q = f(z) = 2z^{\frac{1}{2}}$$

で表せるとする．生産要素の価格を $w = 6$，固定費用を $c_0 = 1$ とする．この企業の費用関数 $C(q)$ を求めよ．また，限界費用，平均費用，平均可変費用を求め，供給関数 $q = q(p)$ を導出せよ．

解答

上の関係式から，

$$z = \frac{q^2}{4}$$

が得られる[2]．この式は，q 単位生産するとき，生産要素が $q^2/4$ 単位必要であることを表している．したがって，費用関数は，

$$C(q) = c_0 + wz = 1 + \frac{3}{2}q^2$$

定義より，$MC = 3q$，$AC = \frac{3}{2}q + \frac{1}{q}$，$AVC = \frac{3}{2}q$．

$p = MC$，$p \geqq AVC$ より，供給関数は，$q = \frac{p}{3}$．

---

[1]限界生産力ともいう．

[2]数学では，逆関数 f^{-1} という．

2. 生産要素が 2 つのとき

生産要素の投入量を z_1, z_2 とし，生産量を q とする．生産技術を次のような関数で表現する．

$$q = F(z_1, z_2) \tag{1}$$

例 1. コブ＝ダグラス型生産関数[3]

$$q = Az_1^{\alpha} z_2^{\beta} \qquad (0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1,\ A > 0 \text{ は定数}) \tag{2}$$

例 2. レオンチェフ型生産関数[4]

$$q = \min\left\{\frac{z_1}{a}, \frac{z_2}{b}\right\} \qquad (a > 0,\ b > 0 \text{ は定数}) \tag{3}$$

問題 1　(2) 式の生産関数は，生産要素の限界生産性が正かつ逓減することを示せ．
$(\partial q/\partial z_1 > 0,\ \partial q/\partial z_2 > 0,\ \partial^2 q/\partial z_1^2 < 0,\ \partial^2 q/\partial z_2^2 < 0$ を示す$)$

目標とする生産量を $\bar{q}$ とする．生産要素の投入量の組合せ (z_1, z_2) はいくつもある．これらの組合せの軌跡を，等産出量曲線あるいは等量線 (isoquant) という．等量線とは，数式を用いると次のように表せる．

$$\bar{q} = F(z_1, z_2) \tag{4}$$

問題 2　等量線を平面 (z_1, z_2) 上に図示せよ．

(1) $F(z_1, z_2) = z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}}$,　$\bar{q} = 10$　　$z_1 z_2 = 100$ を満たす曲線
(2) $F(z_1, z_2) = z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}}$,　$\bar{q} = 20$　　$z_1 z_2 = 400$ を満たす曲線
(3) $F(z_1, z_2) = \min\{\frac{z_1}{2}, z_2\}$,　$\bar{q} = 10$　　$(20, 10)$ を頂点とする L 字型
(4) $F(z_1, z_2) = \min\{\frac{z_1}{2}, z_2\}$,　$\bar{q} = 20$　　$(40, 20)$ を頂点とする L 字型

生産要素の限界生産性が正かつ逓減すると仮定する．このとき，等量線には次のような性質がある．

性質 1. 右下がり．原点に関して凸．
性質 2. 生産水準 $\bar{q}$ が高ければ高いほど，等量線は右上にある．
性質 3. 等量線は交わらない．

問題 3　上の 3 つの性質を持つ理由を，言葉で説明せよ．

略解

（性質 1）生産要素を，労働時間とネットワーク利用とする．生産量が一定であるということは，労働時間を増やせば，ネットワーク利用を節約できる．限界生産力が正だから．したがって，等量線は右下がり．
（性質 2）労働時間が少ないとする．労働の限界生産性は高い．したがって，ネットワーク利用を大幅に節約できる．労働時間が多いとする．限界生産性が低いので，ネットワーク利用をあまり節約できない．したがって，等量線は原点に関して凸．
（性質 3）2 本の等量線 ℓ_1, ℓ_2 が交わっていると仮定する．ℓ_1 上の点 A，ℓ_2 上の点 B について，労働時間，ネットワーク利用のいずれも，点 B の方が点 A よりも多くなるような点を取ることができる．定義より，点 A，点 B における生産量は同じ．したがって，限界生産性が正であることに矛盾する．したがって，等量線は交わらない．

太郎「労働の限界生産性は逓減するらしい．勉強時間をもっと増やさないと」

---

[3] 係数 A を全要素生産性 (Total Factor Productivity, TFP) という．
[4] a, b を投入係数という．$\min\{.,.\}$ の意味は，補論を参照せよ．

補足

レオンチェフ型生産関数と等量線

$\min\{.,.\}$ とは，カッコの中の 2 つの数のうち小さい方を選べという意味．たとえば，$\min\{4,2\}=2$ である．文字を含むときは，場合分けをする．

$$\min\{a,2\} = \begin{cases} a & \text{if} \quad a \leqq 2 \\ 2 & \phantom{\text{if}} \quad a \geqq 2 \end{cases}$$

(3) 式の等量線を求めよう．目標とする生産量を q とする．

$$q = \min\left\{\frac{z_1}{a}, \frac{z_2}{b}\right\} \tag{5}$$

ここで，

$$\min\left\{\frac{z_1}{a}, \frac{z_2}{b}\right\} = \begin{cases} \frac{z_1}{a} & \text{if} \quad \frac{z_1}{a} \leqq \frac{z_2}{b} \\ \frac{z_2}{b} & \phantom{\text{if}} \quad \frac{z_1}{a} \geqq \frac{z_2}{b} \end{cases}$$

であることから，(5) 式は，

$$\begin{cases} q = \frac{z_1}{a} & \text{if} \quad z_2 \geqq \frac{b}{a}z_1 \\ q = \frac{z_2}{b} & \phantom{\text{if}} \quad z_2 \leqq \frac{b}{a}z_1 \end{cases}$$

これを，平面 (z_1, z_2) 上に図示する．$q = \frac{z_1}{a} \Leftrightarrow z_1 = aq$ は垂直線を表す．$q = \frac{z_2}{b} \Leftrightarrow z_2 = bq$ は水平線を表す．$z_2 \geqq \frac{b}{a}z_1$ は，半直線 $z_2 = \frac{b}{a}z_1$ の上の領域を表す．$z_2 \leqq \frac{b}{a}z_1$ は，半直線の下の領域を表す．以上をまとめると，半直線の上の領域では垂直線を引き，下の領域では水平線を引く．交点の座標は，(aq, bq) である．レオンチェフ型生産関数の等量線は，L 字型になる（下図）．

図．等量線（$a=3, b=2, q=10$）