

第 14 講 不確実性 (2) 保険と資産選択 (テキスト 262-267 ページ)

花子「うちのお母さん，ボーナスの運用で悩んでみたい」

太郎「うちもそう．何かアドバイスできないかな」

2つの状態 (state) があり，確率 α で状態 1 が，確率 $(1 - \alpha)$ で状態 2 が実現する．状態 1 における所得を x_1 ，状態 2 における所得を x_2 とし，所得 x から得られる効用を $U(x)$ とすると，期待効用は次式で表される．

$$EU = \alpha U(x_1) + (1 - \alpha)U(x_2) \quad (1)$$

例題 1 (損害保険)

葉子は，資産 W を持っている．災害が発生する確率を α ，発生しない確率を $(1 - \alpha)$ とする．災害が発生すると，資産はゼロになる．発生しなければ資産は W のまま．ただし，次のような損害保険を利用できる．災害が発生したら，保険金 D をもらえる．災害が発生しないときは，保険料 pD を払う ($0 < p < 1$ は定数)．葉子は，資産が x のとき， $U(x) = \log x$ の効用を得るとする．葉子にとっての最適な保険金 D を求めよ．

解答

各 state における資産は，

$$\begin{cases} x_1 = 0 + D \\ x_2 = W - pD \end{cases}$$

(1) 式に代入すると，葉子の期待効用は，保険金 D の関数となる．

$$EU = \alpha \log D + (1 - \alpha) \log(W - pD) \quad (2)$$

定義域は，

$$0 < D < \frac{W}{p}$$

(2) 式を D で微分する¹．

$$\begin{aligned} EU' &= \alpha \times \frac{1}{D} + (1 - \alpha) \times \frac{-p}{W - pD} \\ &= \frac{\alpha W - pD}{D(W - pD)} \end{aligned}$$

増減表は次の通り．

D	0	$\frac{\alpha W}{p}$	$\frac{W}{p}$
EU'		+	0
EU		↗ 極大 ↘	

したがって，最適な保険金は，

$$D^* = \frac{\alpha W}{p} \quad (3)$$

である．

… (答)

¹対数関数の微分法と，合成関数の微分法を利用する．

$$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

補足

保険会社は、災害がないと保険料収入 pD を得る。災害が発生すると保険金 D を支払う。保険会社の期待収益は、 $\pi = (1 - \alpha) \times pD - \alpha \times D$ である。保険市場が完全競争的であるとき期待収益はゼロ。 $\pi = 0$ とすると、保険料率は、

$$p^* = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (4)$$

となる。(4) 式を、保険数理的に公平な料率という (actuarially fair rate)。

(4) 式を (3) 式に代入すると、保険金、保険料が得られる。

$$\begin{aligned} D^* &= (1 - \alpha)W \\ p^* D^* &= \alpha W \end{aligned}$$

このとき、

$$x_1^* = x_2^* = (1 - \alpha)W \quad (5)$$

が成り立つ。保険数理的に公平であるとき、個人はどちらに転んでも同じ資産になるように保険に加入する。完全加入という。問題もあるが対策もある²。

例題 2 (資産選択 (ポートフォリオ))

葉子は、100 万円の資産運用を考えている。安全資産 (貨幣) と危険資産がある。安全資産の金利はゼロ。危険資産は、確率 $\frac{1}{5}$ で投資額の 5 倍になり、確率 $\frac{4}{5}$ で投資額の半分になるとする。葉子は、確実な資産 y 万円に対して、 $U(y) = \log y$ の効用を得るとする。葉子にとっての最適な資産選択を求めよ。

解答

危険資産への投資額を x 万円とする ($0 \leq x \leq 100$)。

このとき、good state における資産は、

$$(100 - x) + 5x = 100 + 4x$$

bad state における資産は、

$$(100 - x) + \frac{1}{2}x = 100 - \frac{1}{2}x$$

したがって、葉子の期待効用は、 x の関数となる。

$$EU = \frac{1}{5} \log(100 + 4x) + \frac{4}{5} \log\left(100 - \frac{1}{2}x\right)$$

x で微分する。

$$\begin{aligned} EU' &= \frac{1}{5} \times \frac{4}{100 + 4x} + \frac{4}{5} \times \frac{-\frac{1}{2}}{100 - \frac{1}{2}x} \\ &= \frac{200 - 10x}{5(100 + 4x)(100 - \frac{1}{2}x)} \end{aligned}$$

増減表は次の通り。

x	0	20	100
EU'	+	0	-
EU		↗ 極大 ↘	

したがって、 $x = 20$ のとき、期待効用が最大となる。

最適な資産選択は、危険資産 20 万円、安全資産 80 万円。

… (答)

太郎「効用関数が資産選択に影響するんだ」

花子「うちの保険どうなってるか、お母さんに聞いてみよっと」

²モラルハザード、アドバースセクションを参照。